Espaces des modules des courbes algébriques réelles

J. Huisman

Texte de synthèse

Introduction

Dans ce texte je décrirai les résultats principaux de mes travaux dans leur contexte. Je me concentrerai particulièrement sur les travaux présentés ici, i.e. les papiers [22, 24, 25, 26, 27]. L'une des idées principales de ces papiers est celle de l'uniformisation équivariante d'une courbe algébrique réelle. Le groupe des automorphismes d'une telle uniformisation est le groupe fondamental équivariant d'une courbe algébrique réelle. J'ai été amené à introduire ce groupe-là pour construire des systèmes globaux de coordonnées analytiques complexes sur l'espace de Teichmüller de courbes algébriques complexes de genre donné, qui sont équivariants pour l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ [24, 25]. Pour la construction de ces systèmes de coordonnées j'ai du déterminer des présentations explicites du groupe fondamental équivariant d'une courbe algébrique réelle. Ceci a par la suite d'autres applications dans des domaines différents : la classification des groupes quasi-fuchsiens étendus [29] et la description du groupe fondamental algébrique d'une courbe algébrique réelle comme complété profini du groupe fondamental équivariant de celle-ci [30].

Chaque système de coordonnées équivariantes construit sur l'espace de Teichmüller des courbes algébriques complexes de genre donné induit un système global de coordonnées analytiques réelles sur l'espace de Teichmüller réel des courbes algébriques réelles de type topologique donné. Ce système particulier semble difficile à étudier. Je propose un autre système de coordonnées analytiques réelles sur l'espace de Teichmüller de courbes algébriques réelles de type topologique donné qui semble plus facile à étudier [26]. L'idée pour sa construction est essentiellement l'uniformisation d'une courbe algébrique réelle par un groupe de Schottky classique réel [27]. Cette approche semble permettre d'étudier la structure semi-analytique de l'espace des modules des courbes algébriques réelles stables [49] en considérant certaines dégénérescences de groupes de Schottky.

Dans le papier [23] je montre que l'espace des modules des courbes algébriques réelles de genre donné a une structure naturelle de variété semi-analytique. Dans [22] je montre que cette structure est une vraie structure semi-analytique, i.e., elle n'est pas analytique réelle. Plus précisément, cela implique qu'il n'y a pas de structure naturelle analytique réelle sur l'espace des modules des courbes algébriques réelles de genre donné.

Coordonnées sur l'espace de Teichmüller complexe

Soit X une surface de Riemann compacte de genre g, où $g \geq 2$. Le Théorème d'uniformisation de Koebe-Poincaré [32, 45] dit qu'il existe un revêtement holomorphe

$$p\colon U \to X$$

de X par le demi-plan supérieur $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Le groupe des automorphismes

$$G = \mathrm{Aut}(p) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(U) \,|\, p \circ \alpha = p\}$$

est un sous-groupe du groupe $\mathrm{Aut}(U) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et agit proprement discontinûment sur U. De plus, son ensemble limite dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est égal à $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, i.e., G est un groupe fuchsien réel de la première espèce [36].

Comme U est simplement connexe, p est un revêtement universel de X. En particulier, le groupe G est isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(X)$ de X. Soit

$$\rho\colon \pi_1(X) \longrightarrow G$$

un isomorphisme.

Une déformation quasi-conforme [43] de ρ est un morphisme de groupes $\tilde{\rho}$ de $\pi_1(X)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ tel qu'il existe un homéomorphisme quasi-conforme h de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans lui-même avec

$$\tilde{\rho}(\gamma) = h \circ \rho(\gamma) \circ h^{-1}$$

pour tout $\gamma \in \pi_1(X)$. Une telle déformation est dite réelle si $h(U) \subseteq U$ et h est équivariant pour l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, i.e., si $h(U) \subseteq U$ et $h(\sigma(z)) = \sigma(h(z))$ pour tout $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, où σ est la conjugaison complexe. Soit $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho)$ (resp. $\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(\rho)$) l'ensemble des déformations complexes (resp. réelles) de ρ. L'ensemble $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho)$ (resp. $\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(\rho)$) a une structure naturelle de variété holomorphe complexe (resp. réelle). Il est clair que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ (resp. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$) agit, d'une manière analytique, sur $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho)$ (resp. $\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(\rho)$) par conjugaison. Le quotient

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho) \quad (\text{resp. } \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(\rho))$$

est une variété holomorphe complexe (resp. réelle).

Soit $T(X)$ l'espace des modules de Teichmüller de X. Un élément de $T(X)$ est une paire (Y, φ) où Y est une surface de Riemann compacte de genre g et φ est un isomorphisme de groupes de $\pi_1(X)$ sur $\pi_1(Y)$ préservant le produit d'intersection de 1-cycles [41]. Deux de telles paires (Y, φ) et (Z, ψ) représentent le même élément de $T(X)$ si et seulement s'il existe un isomorphisme $f\colon Y \to Z$ et un automorphisme intérieur de $\pi_1(Z)$ tel que $f_\star \circ \varphi = \alpha \circ \psi$. L'espace de Teichmüller $T(X)$ admet une structure naturelle de variété holomorphe complexe. Cette variété est de dimension $3g-3$ et est, en fait, homéomorphe à $\mathbb{C}^{3g-3}$ [43].

Soit

$$\Phi_{\mathbb{R}}\colon \mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(\rho) \longrightarrow T(X)$$

l'application définie par $\Phi_{\mathbb{R}}(\tilde\rho) = (U/\mathrm{im}(\tilde\rho), \tilde\rho)$ pour $\tilde\rho \in \mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(\rho)$. L'application $\Phi_{\mathbb{R}}$ est analytique réelle et est un quotient pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(\rho)$ [43]. Plus précisément, $\Phi_{\mathbb{R}}$ induit un isomorphisme de variétés holomorphes réelles

$$\overline{\Phi}_{\mathbb{R}}\colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(\rho) \longrightarrow T(X).$$

On peut construire un système global de coordonnées analytiques réelles

$$\Xi_{\mathbb{R}}\colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(\rho) \longrightarrow \mathbb{R}^{6g-6}$$

sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(\rho)$—et donc sur $T(X)$ en composant $\Xi_{\mathbb{R}}$ avec $\overline{\Phi}_{\mathbb{R}}^{-1}$—en choisissant une présentation du groupe $\pi_1(X)$ [1]. Ce système de coordonnées analytiques réelles sur $T(X)$ est appelé le système de coordonnées de Fricke.

Si on veut construire un système global de coordonnées analytiques complexes sur $T(X)$, on sera tenté de définir, de façon analogue, une application

$$\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho) \longrightarrow T(X).$$

Malheureusement, cette application est loin d'induire un isomorphisme de variétés holomorphes complexes du quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho)$ sur $T(X)$. En fait, le quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho)$ est isomorphe à $T(X) \times T(X^\sigma)$, où X^σ est la surface de Riemann conjuguée de X. En effet, pour une déformation quasi-conforme $\tilde\rho$ de ρ définie par l'homéomorphisme quasi-conforme h, on définit $\tilde U = h(U)$ et $\tilde L = h(L)$, où L est le demi-plan inférieur $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) < 0\}$. Le domaine de discontinuité de $\mathrm{im}(\rho)$ est alors égal à $\tilde U \cup \tilde L$. On définit une application

$$\Phi_{\mathbb{C}}\colon \mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho) \longrightarrow T(X) \times T(X^\sigma)$$

par

$$\Phi_{\mathbb{C}}(\tilde\rho) = ((\tilde U/\mathrm{im}(\tilde\rho), \tilde\rho), (\tilde L/\mathrm{im}(\tilde\rho), \tilde\rho)$$

pour $\tilde{\rho} \in \mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho)$. L'application $\Phi_{\mathbb{C}}$ est analytique complexe et est un quotient pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho)$. Plus précisément, $\Phi_{\mathbb{C}}$ induit un isomorphisme de variétés holomorphes complexes [43]

$$\overline{\Phi}_{\mathbb{C}}\colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho) \longrightarrow T(X) \times T(X^{\sigma}).$$

En particulier, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho)$ est de dimension $6g-6$.

On peut construire un système global de coordonnées complexes analytiques sur $T(X)$ en choisissant une projection

$$\Pi_{\mathbb{C}}\colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho) \longrightarrow \mathbb{C}^{3g-3},$$

dont la restriction à $\overline{\Phi}_{\mathbb{C}}^{-1}(T(X)\times\{(X^{\sigma},\mathrm{id})\})$ est injective [7, 35]. Une construction d'un système de coordonnées plus intéressante [13] suppose que X admet une structure réelle, i.e., qu'il existe une action du groupe de Galois $\Sigma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur X telle que la conjugaison complexe σ agit d'une façon anti-holomorphe. On appellera courbe algébrique réelle une surface de Riemann compacte munie d'une telle action de Σ. L'espace de Teichmüller $T(X)$ peut être alors plongé diagonalement dans $T(X) \times T(X^{\sigma})$. En effet, soit l'application

$$\Delta\colon T(X) \longrightarrow T(X) \times T(X^{\sigma})$$

définie par $\Delta(Y,\varphi) = ((Y,\varphi),(Y,\varphi\circ\sigma_{\star}))$ pour $(Y,\varphi) \in T(X)$. Il est clair que Δ est un plongement de la variété holomorphe complexe $T(X)$ dans $T(X) \times T(X^{\sigma})$. Cette fois-ci, on choisit une projection $\Pi_{\mathbb{C}}$ dont la restriction à $\overline{\Phi}_{\mathbb{C}}^{-1}(\Delta(T(X)))$ est injective. Cette dernière construction d'un système de coordonnées est intéressante car elle donne un système de coordonnées Σ-équivariantes sur $T(X)$. Malheureusement la courbe algébrique réelle X dans cette construction est bien particulière : l'ensemble X^{Σ} des points fixes possède $g+1$ composantes connexes. Une telle courbe algébrique réelle est appelée une M-courbe.

Les papiers [24, 25] veulent expliquer, de manière conceptuelle, la construction *ad hoc* du système global de coordonnées analytiques complexes équivariantes sur l'espace de Teichmüller $T(X)$ d'une M-courbe X. De plus, cette approche permet de généraliser et de construire un tel système sur l'espace de Teichmüller $T(X)$ de n'importe quelle courbe algébrique réelle X. L'idée principale est d'uniformiser une courbe algébrique réelle d'une façon équivariante.

Supposons que X est, en fait, une courbe algébrique réelle, i.e. qu'on a une structure réelle sur la surface de Riemann X. A plusieurs endroits dans la littérature [2, 8, 44] on essaie de relever l'action de Σ sur X à une action de Σ sur U pour obtenir une uniformisation de la courbe algébrique réelle X par le demi-plan supérieur U. A mon avis cela ne donne pas la bonne uniformisation d'une courbe algébrique réelle. Il me semble qu'il ne faut pas tenir à ce qu'un revêtement équivariant soit connexe. En effet, quand on considère des espaces topologiques E munis d'une action d'un groupe Σ, la connexité de E devrait être définie en termes de sous-ensembles de E stables pour l'action de Σ. Ainsi, E est équivariammant connexe si et seulement si le quotient E/Σ est connexe. On peut alors refaire la théorie des revêtements topologiques [14] dans la catégorie des espaces topologiques munis d'une Σ-action. Pour la courbe algébrique réelle X cela donne un revêtement équivariant universel

$$q\colon D \longrightarrow X$$

par le demi-plan double $D = U \cup L$ défini par

$$q(z) = \begin{cases} p(z) & \text{si } z \in U, \\ \sigma(p(\sigma(z)) & \text{si } z \in L. \end{cases}$$

Ce revêtement est holomorphe. Le groupe H des automorphismes équivariant du revêtement q est donc un sous-groupe du groupe de tous les automorphismes équivariant du demi-plan double D, i.e., H est un sous-groupe du groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$. De plus, le domaine de discontinuité de H est égal à D et ni U ni L ne sont stables pour l'action de H, i.e., H est un groupe fuchsien étendu [37]. Il est clair que le groupe G est un sous-groupe de H d'indice 2.

Comme q est un revêtement équivariant universel, le groupe H est isomorphe au groupe fondamental équivariant $\pi_1(X,\Sigma)$ de X. Le groupe équivariant $\pi_1(X,\Sigma)$ contient $\pi_1(X)$ comme un sous-groupe d'indice 2. Soit

$$\tau\colon \pi_1(X,\Sigma) \longrightarrow H$$

un isomorphisme dont la restriction à $\pi_1(X)$ coincide avec ρ.

Soit $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau)$ l'espace de déformations complexes quasi-conformes de τ. Alors, $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau)$ est une variété holomorphe complexe [33]. Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit, d'une manière analytique, sur $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau)$ par conjugaison. Le quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau)$ est une variété holomorphe complexe.

On définit l'application

$$\Psi_{\mathbb{C}}\colon \mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau) \longrightarrow T(X)$$

par $\Psi_{\mathbb{C}}(\tilde\tau) = (\tilde U/\tilde\tau(\pi_1(X)), \tilde\tau_{|\pi_1(X)})$. L'application $\Psi_{\mathbb{C}}$ est analytique complexe et est un quotient pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau)$ [33]. Plus précisément, $\Psi_{\mathbb{C}}$ induit un isomorphisme de variétés holomorphes complexes

$$\overline{\Psi}_{\mathbb{C}}\colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau) \longrightarrow T(X).$$

En choisissant une présentation du groupe fondamental équivariant $\pi_1(X, \Sigma)$ de X on peut construire un système global de coordonnées analytiques complexes équivariantes

$$\Xi_C \colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash \mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau) \longrightarrow \mathbb{C}^{3g-3}$$

sur le quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash \mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau)$. En composant $\Xi_{\mathbb{C}}$ avec $\overline{\Psi}_{\mathbb{C}}^{-1}$ on obtient un système global de coordonnées analytiques complexes équivariantes sur l'espace de Teichmüller $T(X)$ de la courbe algébrique réelle X [24, 25]. Plus précisément on a l'énoncé suivant.

Théorème. *Soit X une courbe algébrique réelle de genre g. Considérons l'espace de Teichmüller $T(X)$ des courbes algébriques complexes de genre g muni de l'action induite de $\Sigma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Alors il existe un système global de coordonnées analytiques complexes équivariantes*

$$\Gamma_{\mathbb{C}} \colon T(X) \longrightarrow \mathbb{C}^{3g-3}.$$

La construction de ce système de coordonnées est effectivement une généralisation de la construction [13] car on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho) \arrow[r, "\Phi_{\mathbb{C}}"] & T(X) \times T(X^{\sigma}) \\
\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau) \arrow[u, "r"] \arrow[r, "\Psi_{\mathbb{C}}"'] & T(X) \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

où r est le morphisme de restriction et Δ est le plongement diagonal. Ce diagramme induit alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash \mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\rho) \arrow[r, "\overline{\Phi}_{\mathbb{C}}"] \arrow[dl, "\Pi_{\mathbb{C}}"'] & T(X) \times T(X^{\sigma}) \\
\mathbb{C}^{3g-3} & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\backslash \mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(\tau) \arrow[l, "\Xi_{\mathbb{C}}"] \arrow[u, "\overline{r}"] \arrow[r, "\overline{\Psi}_{\mathbb{C}}"'] & T(X) \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que l'application $\Pi_{\mathbb{C}}$ est une projection sur $\mathbb{C}^{3g-3}$ dont la restriction à $\overline{\Phi}_{\mathbb{C}}^{-1}(\Delta(T(X)))$ est injective comme dans la construction [13].

Classification de groupes quasi-fuchsiens étendus

Un sous-ensemble C de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un quasi-cercle s'il existe un homéomorphisme quasi-conforme h de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans lui-même tel que $h(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) = C$ [43].

Un sous-groupe G de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe quasi-fuchsien étendu de la première espèce si son domaine de discontinuité Ω est égal au complémentaire $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash C$ d'un quasi-cercle C dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et si aucune des deux composantes connexes de Ω n'est stable pour l'action de G [37]. Pour un tel groupe G, le quotient Ω/G est connexe et donc une surface de Riemann. On dit que G est co-compact si Ω/G est compact.

Une classe intéressante de groupes quasi-fuchsiens étendus est celle des groupes quasi-fuchsiens étendus co-compacts agissant librement sur leur domaine de discontinuité. Cette classe de groupes quasi-fuchsiens étendus est intéressante car toute surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ peut être uniformisée par un tel groupe [24, 25]. Il est donc naturel de se poser la question de la classification des groupes quasi-fuchsiens étendus co-compacts agissant librement sur leur domaine de discontinuité. Cette question semble être peu étudiée [37]. Les résultats des papiers [24, 25] permettent de classifier cette classe de groupes Kleiniens.

Soit $g \geq 2$ un entier et soient r, $\tilde{r}$ et s des entiers naturels tels que $r+\tilde{r} \neq 0$ et $r+\tilde{r}+2s = g+1$. Soit $G_{r,\tilde{r},s}$ le groupe donné par la présentation

$$<x_1, \ldots, x_{g+r+1} \mid R_1, \ldots, R_{2r+1}>,$$

où les relations R_i sont données par

$$R_{2i-1} = [x_{2i-1}, x_{2i}] \text{ et } R_{2i} = x_{2i}^2 \text{ pour } i = 1, \ldots, r, \text{ et}$$
$$R_{2r+1} = x_1 x_3 \cdots x_{2r-1} x_{2r+1}^2 x_{2r+2}^2 \cdots x_{2r+\tilde{r}}^2 [x_{2r+\tilde{r}+1}, x_{2r+\tilde{r}+2}] \cdots [x_{g+r}, x_{g+r+1}].$$

En fait, $G_{r,\tilde{r},s}$ est isomorphe au groupe fondamental équivariant de la surface compacte connexe orientée $S = S_{r-1,\tilde{r},s}$ munie d'une action de Σ qui a été construite dans [25]. La surface S est de genre g, l'ensemble des points fixes S^Σ possède r composantes connexes et le complémentaire $S\backslash S^\Sigma$ est connexe si et seulement si $\tilde{r} \neq 0$.

La classification de la classe des groupes quasi-fuchsiens étendus à laquelle on s'intéresse est contenue dans l'énoncé suivant.

Théorème. *1. Soit G un groupe quasi-fuchsien étendu de la première espèce co-compact et agissant librement sur son domaine de discontinuité. Alors, il existe des entiers naturels r, $\tilde{r}$ et s satisfaisant $r+\tilde{r} \neq 0$ et $r+\tilde{r}+2s \geq 3$ tels que G est isomorphe à $G_{r,\tilde{r},s}$.*

2. Chaque groupe $G_{r,\tilde{r},s}$ admet une représentation

$$\rho\colon G_{r,\tilde{r},s} \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

telle que l'image $\mathrm{im}(\rho)$ est un groupe quasi-fuchsien étendu de la première espèce co-compact et agissant librement sur son domaine de discontinuité.

3. *Les groupes $G_{r,\tilde{r},s}$ et $G_{r',\tilde{r}',s'}$ sont isomorphes si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées.*
   (a) $r + \tilde{r} + 2s = r' + \tilde{r}' + 2s'$;
   (b) $r = r'$;
   (c) $\tilde{r} = 0 = \tilde{r}'$ *où* $\tilde{r} \neq 0 \neq \tilde{r}'$.

Les assertions 1 et 2 sont des conséquences immédiates des résultats contenus dans les papiers [24, 25]. Le fait que $G_{r,\tilde{r},s}$ et $G_{r',\tilde{r}',s'}$ sont isomorphes si les entiers naturels $r, \tilde{r}, s, r', \tilde{r}', s'$ satisfont les conditions 3a, 3b et 3c est également une conséquence de ces résultats. L'assertion restante peut être montrée après une étude des groupes fondamentaux équivariants des surfaces $S_{r-1,\tilde{r},s}$ [29] (voir aussi [28]).

Le groupe fondamental algébrique d'une courbe algébrique réelle

Dans cette section et seulement dans cette section une courbe algébrique réelle X est un schéma propre sur $\mathbb{R}$ non singulier géométriquement intègre et de dimension 1 [16]. L'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points complexes de X est considéré comme une surface de Riemann munie d'une structure réelle donnée par l'action du groupe de Galois $\Sigma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur $X(\mathbb{C})$. En fait, il est bien connu que la donnée de $X(\mathbb{C})$ avec l'action de Σ suffisent pour récupérer la courbe algébrique réelle X.

Soit X une courbe algébrique réelle. Soit $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ le groupe fondamental algébrique de X [15]. On peut montrer comme dans le cas des courbes algébriques complexes [39] l'énoncé suivant [30].

Théorème. *Soit X une courbe algébrique réelle. Alors, le groupe fondamental algébrique $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ de X est isomorphe au complété profini $\widehat{\pi}_1(X(\mathbb{C}), \Sigma)$ du groupe fondamental équivariant $\pi_1(X(\mathbb{C}), \Sigma)$ de $X(\mathbb{C})$.*

Comme conséquence immédiate de ce résultat et de la présentation explicite du groupe fondamental équivariant $\pi_1(X(\mathbb{C}), \Sigma)$ de $X(\mathbb{C})$ [24, 25], on obtient le calcul du premier groupe de cohomologie étale d'une courbe algébrique réelle [47].

Corollaire. *Soit X une courbe algébrique réelle. Soit g le genre de X et soit r le nombre de composantes connexes de l'ensemble $X(\mathbb{R})$ des points réels de X. Soit n un entier non nul. Si n est impair,*

$$H^1_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g.$$

Si n est pair,

$$H^1_{ét}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g & \text{si } X(\mathbb{R}) \neq \emptyset, \text{ et} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g & \text{si } X(\mathbb{R}) = \emptyset. \end{cases}$$

On appelle type topologique de X la classe d'isomorphisme de la paire d'espaces topologiques $(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{R}))$, où $X(\mathbb{R})$ est considéré comme sous-ensemble de $X(\mathbb{C})$. Il est intéressant de noter que le type topologique de X n'est pas déterminé par $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. En effet, pour tout $g \geq 2$ il existe des courbes algébriques réelles X et Y de genre g telles que $X(\mathbb{R})$ et $Y(\mathbb{R})$ ont le même nombre de composantes connexes et telles que $X(\mathbb{C})\backslash X(\mathbb{R})$ est connexe et $Y(\mathbb{C})\backslash Y(\mathbb{R})$ est non connexe. D'après le corollaire précédent, $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont isomorphes tandis que X et Y n'ont pas le même type topologique.

Une étude plus profonde du groupe fondamental équivariant $\pi_1(X(\mathbb{C}), \Sigma)$ révèle que le groupe fondamental algébrique $\pi_1^{\text{alg}}(X)$ d'une courbe algébrique réelle X de genre strictement positif détermine le type topologique de X. Plus précisément on a l'énoncé suivant [30].

Théorème. *Soient X et Y des courbes algébriques réelles de genre strictement positif. Alors, les courbes algébriques réelles X et Y ont le même type topologique si et seulement si les groupes profinis $\pi_1^{\text{alg}}(X)$ et $\pi_1^{\text{alg}}(Y)$ sont isomorphes.*

Coordonnées sur l'espace de Teichmüller réel

Soit X une courbe algébrique réelle de genre $g \geq 2$. Soit $T(X)$ l'espace de Teichmüller complexe de X, i.e., $T(X)$ est l'espace de Teichmüller de X en tant que surface de Riemann, en oubliant la structure réelle sur X. L'action du groupe de Galois $\Sigma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur X induit une action de Σ sur $T(X)$. Pour cette action la conjugaison complexe σ agit d'une façon anti-holomorphe. Comme (X, id) est un point fixe pour l'action de Σ, le sous-ensemble des points fixes $T(X)^\Sigma$ est non vide. Comme $T(X)$ est une variété holomorphe complexe, i.e. une variété analytique complexe sans singularités, $T(X)^\Sigma$ est une variété holomorphe réelle de la même dimension que $T(X)$, i.e., $\dim T(X)^\Sigma = 3g - 3$ [50]. En fait, $T(X)^\Sigma$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{3g-3}$ [12]. On appelle $T(X)^\Sigma$ l'espace de Teichmüller réel de la courbe algébrique réelle X. Il y a une interprétation des éléments de $T(X)^\Sigma$ comme ensemble des paires (Y, f) où Y est une courbe algébrique réelle de genre g et $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme quasi-conforme équivariant. Deux de telles paires (Y, f) et (Z, h) représentent le même élément de $T(X)$ si et seulement s'il existe un isomorphisme $k\colon Y \to Z$ tel que $k \circ f$ est homotope à h [12].

Comme le système global de coordonnées analytiques complexes

$$\Gamma_{\mathbb{C}}\colon T(X) \longrightarrow \mathbb{C}^{3g-3}$$

est équivariant [24, 25], il induit un système global de coordonnées analytiques réelles

$$\Gamma_{\mathbb{R}}\colon T(X)^{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{R}^{3g-3}$$

sur l'espace de Teichmüller réel de X. Par construction, $\Gamma_{\mathbb{R}}$ s'étend à un système global de coordonnées analytiques complexes sur $T(X)$. Si on s'intéresse seulement à l'espace de Teichmüller réel $T(X)^{\Sigma}$ et à son quotient, l'espace des modules $M(X)$ des courbes algébriques réelles du même type topologique que X, on pourrait se contenter d'un système global de coordonnées analytiques réelles sur $T(X)^{\Sigma}$ qui ne s'étende pas forcément à un système global de coordonnées analytiques complexes sur $T(X)$. L'avantage de tels systèmes de coordonnées est qu'ils peuvent être plus simples à étudier.

L'idée est d'uniformiser une courbe algébrique réelle X par un revêtement holomorphe $p\colon \Omega \to X$ où

1. Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ contenant le demi-plan double $D = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$—et est donc stable par conjugaison,

2. p est équivariant pour l'action de Σ, et

3. l'image réciproque $p^{-1}(X^{\Sigma})$ de l'ensemble des points fixes X^{Σ} est égale à $\Omega \cap \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

On appelle une uniformisation stricte d'une courbe algébrique réelle X une telle uniformisation de X. Toute courbe algébrique réelle X, sauf celles de genre 0 ou 1 pour lesquelles X^{Σ} est vide, admet une uniformisation stricte [31, 26].

En général on appelle revêtement strict d'un espace topologique X sur lequel un groupe Σ agit un revêtement Σ-équivariant $f\colon Y \to X$ tel que la restriction de f à chaque orbite est injective. Un espace topologique raisonnable admet alors un revêtement strict universel. On définit le groupe fondamental strict $\sigma_1(X,\Sigma)$ de X comme le groupe des automorphismes équivariant d'un revêtement strict universel de X. En fait, il y a une équivalence entre la catégorie des revêtement stricts de X et la catégorie des revêtements ordinaires du quotient X/Σ de X. D'où l'isomorphisme

$$\sigma_1(X,\Sigma) \cong \pi_1(X/\Sigma).$$

En particulier, X est son propre revêtement strict universel si et seulement si X/Σ est simplement connexe. Malgré l'équivalence entre les revêtements stricts et les revêtements ordinaires du quotient, il est commode d'avoir la notion de revêtements stricts pour la suite.

Soit à nouveau X une courbe algébrique réelle et Σ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Soit

$$p\colon \Omega \longrightarrow X$$

une uniformisation stricte de X. Soit G le groupe des automorphismes équivariants du revêtement p. Le groupe G est alors un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ agissant proprement discontinûment sur D, i.e., G est un groupe fuchsien ou un groupe fuchsien étendu.

Comme le quotient Ω/Σ est simplement connexe, p est un revêtement strict universel de X. En particulier, le groupe G est isomorphe au groupe fondamental strict $\sigma_1(X,\Sigma)$ de X. Soit

$$\rho\colon \sigma_1(X,\Sigma) \longrightarrow G$$

un isomorphisme. On se concentre sur le cas $X^\Sigma \neq \emptyset$. Dans ce cas, X/Σ est une surface compacte connexe à bord non vide. Donc le groupe $\pi_1(X/\Sigma)$ est libre. Il se trouve qu'en fait le rang de $\pi_1(X/\Sigma)$ est égal au genre g de X. Il est remarquable que le rang de $\pi_1(X/\Sigma)$ ne dépende ni du nombre de composantes connexes de X^Σ ni du nombre de composantes connexes du complémentaire $X\backslash X^\Sigma$.

Soit $\mathrm{Def}_\mathbb{R}(\rho)$ l'ensemble des déformations quasi-conformes réelles de ρ. L'ensemble $\mathrm{Def}_\mathbb{R}(\rho)$ admet une structure de variété holomorphe réelle. Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ agit, de façon holomorphe réelle, sur $\mathrm{Def}_\mathbb{R}(\rho)$ et le quotient $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{Def}_\mathbb{R}(\rho)$ est une variété holomorphe réelle. On définit facilement un système global de coordonnées analytiques réelles

$$\Xi_\mathbb{R}\colon \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{Def}_\mathbb{R}(\rho) \longrightarrow \mathbb{R}^{3g-3}$$

si $g \geq 2$. On définit également facilement une application analytique réelle

$$\Phi_\mathbb{R}\colon T(X)^\Sigma \longrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{Def}_\mathbb{R}(\rho).$$

on démontre alors l'énoncé suivant [26].

Théorème. *L'application $\Phi_\mathbb{R}$ définie ci-dessus est un isomorphisme de variétés holomorphes réelles. En particulier, la composée*

$$\Xi_\mathbb{R}\circ\Phi_\mathbb{R}\colon T(X)^\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{3g-3}$$

est un système global de coordonnées analytiques réelles sur l'espace de Teichmüller réel de X.

Une uniformisation stricte $p\colon \Omega \to X$ d'une courbe algébrique réelle a encore un autre interêt. En fait, une telle uniformisation est nécessairement une uniformisation par un groupe de Schottky réel.

Rappelons [36] qu'un groupe de Schottky de rang g est un sous-groupe G de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $2g$ cercles de Jordan $C_{\pm i} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, pour $i = 1, \ldots, g$, un sous-ensemble fermé connexe D de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ satisfaisant les conditions suivantes.

1. Les cercles $C_{\pm i}$, pour $i = 1, \ldots, g$, sont deux à deux disjoints.

2. Le bord ∂D est égal à la réunion $\bigcup C_i$ des $2g$ cercles $C_{\pm i}$, pour $i = 1, \ldots, g$.

3. $\alpha_i(C_i) = C_{-i}$ et $\alpha_i(D) \cap D = C_{-i}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, g\}$.

4. Le groupe G est engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$.

On dit que G est un groupe de Schottky classique si l'on peut choisir les cercles $C_{\pm i}$ euclidiens. On peut montrer qu'un groupe de Schottky réel, i.e. contenu dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$, est nécessairement classique. De plus, on peut alors choisir les cercles $C_{\pm i}$ euclidien avec centres réels. [27].

Une question naturelle est de savoir si toute surface de Riemann compacte peut être uniformisée par un groupe de Schottky classique [6].

On montre l'énoncé suivant [27] qui a été montré indépendamment dans [38].

Théorème. *Toute courbe algébrique réelle X telle que $X^\Sigma \neq \emptyset$ peut être uniformisée par un groupe de Schottky réel. En particulier, toute surface de Riemann compacte qui admet une structure réelle pour laquelle l'action de Σ a des points fixes peut être uniformisée par un groupe de Schottky classique.*

Le fait qu'une courbe algébrique réelle X telle que $X \setminus X^\Sigma$ soit non connexe peut être uniformisée a déjà été montré dans plusieurs papiers [46, 4, 9]. Le cas où $X \setminus X^\Sigma$ est connexe a été traité dans [44] mais j'ai du mal à suivre la démonstration. L'avantage de la démonstration que je donne est qu'elle traite les deux cas au même temps. De plus, l'idée d'uniformisation stricte se restreint pas seulement aux courbes algébriques réelles mais a toute variété algébrique réelle uniformisable en tant que variété algébrique complexe.

L'espace des modules des courbes algébriques réelles

Soit g un entier naturel. Résoudre le problème des modules des courbes algébriques réelles consiste à munir l'ensemble des classes d'isomorphisme

$M_{g/\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles de genre g d'une structure géométrique naturelle. Par exemple, il est facile de voir que l'ensemble $M_{g/\mathbb{R}}$ admet une structure de variété semi-analytique. En effet, soit X une courbe algébrique réelle de genre g. L'espace de Teichmüller réel $T(X)^\Sigma$ de X est une variété holomorphe réelle sur laquelle le groupe modulaire réel $\mathrm{Mod}(X)^\Sigma$ agit de manière analytique réelle et proprement discontinue [48]. Le quotient $T(X)^\Sigma/\mathrm{Mod}(X)^\Sigma$ est alors une variété semi-analytique. L'ensemble $M(X)$ des classes d'isomorphisme des courbes algébriques réelles du même type topologique que X obtient une structure de variété semi-analytique en identifiant $M(X)$ avec ce quotient $T(X)^\Sigma/\mathrm{Mod}(X)^\Sigma$.

Soit n la partie entière de $\frac{1}{2}(3g+4)$. Il existe des courbes algébriques réelles $X_1, \ldots, X_n$ de genre g telles que X_i et X_j n'ont pas les mêmes types topologiques si $i \neq j$ [51]. On munit l'ensemble $M_{g/\mathbb{R}}$ avec la structure d'une variété semi-analytique pour laquelle

$$M_{g/\mathbb{R}} = \coprod_{i=1}^{n} M(X_i).$$

Le caractère naturel de la structure semi-analytique sur $M_{g/\mathbb{R}}$ s'exprime à l'aide des familles de courbes algébriques réelles sur des variétés holomorphes réelles, i.e., pour toute variété holomorphe réelle B et pour toute famille $\mathcal{C}$ de courbes algébriques réelles de genre g sur B, l'application

$$f\colon B \to M_{g/\mathbb{R}}$$

qui envoie $p \in B$ sur la classe d'isomorphisme $[\mathcal{C}_p]$ du fibre $\mathcal{C}_p$ de $\mathcal{C}$ est analytique réelle. De plus, la structure semi-analytique sur $M_{g/\mathbb{R}}$ est universelle pour la propriété ci-dessus [23] (cf. aussi [42]).

On peut se demander si la structure semi-analytique sur $M_{g/\mathbb{R}}$ n'est pas une structure analytique réelle. En général, on définit le bord ∂N d'une variété semi-analytique comme le sous-ensemble des points $p \in N$ tels que le germe de N en p n'est pas un germe d'une variété analytique réelle. La question est donc de savoir si $\partial M_{g/\mathbb{R}}$ est vide.

Soit M une variété holomorphe réelle connexe. Soit G un groupe agissant de manière analytique réelle et proprement discontinue sur M. De plus, l'action de G sur M est supposée fidèle. Soit N le quotient M/G dans la catégorie des espaces localement annelés et soit $\pi\colon M \to N$ l'application quotient. On sait que N est alors une variété semi-analytique. En faisant une étude locale, on peut montrer que l'image $\pi(x)$ d'un point $x \in M$ appartient au bord ∂N de N si et seulement si le stabilisateur G_x de x est d'ordre pair [22].

Si $g \geq 3$, le groupe modulaire réel $\mathrm{Mod}(X)^\Sigma$ d'une courbe algébrique réelle X agit fidèlement sur $T(X)^\Sigma$ [43]. De plus, le stabilisateur d'un élément (Y, f)

de $T(X)^\Sigma$ s'identifie au groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(Y)$ de la courbe algébrique réelle. On a donc le résultat suivant [22].

Théorème. *Soit $g \geq 3$. La classe d'isomorphisme d'une courbe algébrique réelle Y de genre g appartient au bord de $M_{g/\mathbb{R}}$ si et seulement si l'ordre du groupe* $\mathrm{Aut}(Y)$ *est pair.*

En construisant pour chaque type topologique une courbe algébrique réelle ayant un automorphisme d'ordre 2, on montre l'énoncé suivant [22].

Théorème. *Soit $g \geq 3$ et soit X une courbe algébrique réelle de genre g. La structure semi-analytique sur $M(X)$ n'est pas analytique réelle. En particulier, la structure semi-analytique sur $M_{g/\mathbb{R}}$ n'est pas analytique réelle.*

En fait, ce dernier résultat implique qu'il n'y a pas de structure naturelle de variété analytique réelle sur $M_{g/\mathbb{R}}$! Ceci réfute un énoncé de [48].

Grâce au caractère naturel de la structure semi-analytique sur $M_{g\mathbb{R}}$ j'ai pu interpréter les travaux de Cirre [10] sur le problème de modules de courbes algébriques réelles de genre 2. Cela mènera a une description explicite de $M_{2/\mathbb{R}}$ en tant que variété semi-analytique.

On peut montrer qu'il y a une structure naturelle plus riche sur l'ensemble $M_{g/\mathbb{R}}$. Cette structure est celle d'une variété semi-Nash. Cela munit $M_{g/\mathbb{R}}$, en particulier, d'une structure semi-algébrique. Le cas $g = 1$ a été traité dans le papier [21].

L'uniformisation de Schottky d'une courbe algébrique réelle a une application intéressante au problème des modules des courbes algébriques réelles X telles que $X^\Sigma \neq \emptyset$ [27]. En effet, on donne une construction élémentaire de la structure semi-analytique sur l'ensemble $M^{\mathrm{rp}}_{g/\mathbb{R}}$ et une description explicite des espaces de Teichmüller des courbes algébriques réelles de genre g avec l'action des groupes modulaires réels là-dessus.

Structure réelle sous-jacente sur une variété algébrique complexe

Dans la théorie transcendente de variétés algébriques complexes non singulières on considère souvent la structure sous-jacente d'une variété différentiable. Si on veut en tirer des résultats sur la structure algébrique initiale, on rencontre évidemment des problèmes techniques importants. A titre d'exemple, on peut penser à la démonstration analytique de la décomposition de Hodge de la cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière compacte [52]. Depuis, des démonstrations algébriques ont été trouvées [11]. Malheureusement—à mon avis—ces démonstrations passent par la géométrie algébrique en caractéristique p. Il peut être intéressant de voir si la structure algébrique réelle sous-jacente d'une variété algébrique complexe—moins fine que la structure complexe mais pas aussi grossière que la structure différentiable—permet de montrer la décomposition de Hodge d'une façon algébrique tout en évitant la géométrie en caractéristique p. Le résultat suivant peut être considéré un signe de bon augure pour ce programme [20].

Théorème. *Soit X une variété complexe quasi-projective nonsingulière. Soit i un entier naturel. Soit γ la classe d'une i-forme différentielle fermée dans le groupe de cohomologie de de Rham $H^i_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{R})$ de X. Alors il existe une i-forme différentielle fermée algébrique réelle ω sur X telle que sa classe $[\omega]$ dans $H^i_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{R})$ est égale à γ.*

Fibrés vectoriels en géométrie algébrique réelle

Soit X une variété algébrique réelle affine dans le sens de [5]. Soit $p\colon F \to X$ un fibré vectoriel algébrique sur X. Comme X est affine, on s'attend à ce qu'il existe un fibré vectoriel algébrique $q\colon G \to X$ tel que la somme directe $p \oplus q\colon F \oplus G \to X$ soit triviale. Malheureusement, cela n'est pas vrai en général.

On appelle fibré vectoriel *fortement algébrique*, un fibré vectoriel algébrique $p\colon F \to X$ pour lequel il existe un fibré vectoriel algébrique $q\colon G \to X$ tel que la somme directe $p \oplus q\colon F \oplus G \to X$ soit triviale [5].

Il est évident que l'espace total F d'un fibré vectoriel fortement algébrique $p\colon F \to X$ est une variété algébrique réelle affine. La question se pose alors de savoir si le contraire est vrai également [5]. Plus précisément, soit $p\colon F \to X$ un fibré vectoriel algébrique dont l'espace total F est affine. Est-ce que le fibré vectoriel $p\colon F \to X$ est fortement algébrique?

Une première tentative [34] de répondre affirmativement à cette question s'avérait malheureusement incorrecte. Dans un premier temps [18], j'ai montré que la réponse à la question est affirmative en me servant d'un résultat d'Artin [3] sur les lois de groupes rationnelles sur des schémas. Dans un second temps [19], j'ai montré que la réponse à la question est affirmative d'une façon plus élémentaire. Cette dernière démonstration se base sur une étude du fibré normal de X dans F, plongé comme section nulle du fibré vectoriel $p\colon F \to X$.

Composantes connexes de variétés abéliennes réelles avec multiplications complexes

Soit X une variété abélienne réelle. On suppose que $X_{\mathbb{C}}$ est simple et à multiplications complexes [40]. De plus, on suppose que l'anneau $\mathrm{End}(X_{\mathbb{C}})$ des endomorphismes de $X_{\mathbb{C}}$ est intégralement clos. Soit L le corps des fractions de $\mathrm{End}(X_{\mathbb{C}})$ et K celui de $\mathrm{End}(X)$. J'ai réalisé une étude assez complète [17] du rapport entre le discriminant de l'extension de corps L/K et le nombre de composantes connexes de l'ensemble $X(\mathbb{R})$ des points réels de X.

A titre d'exemple, soit k un entier naturel et supposons que L est le corps de nombres cyclotomiques obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les racines k-ièmes de l'unité. Si k est impair, $X(\mathbb{R})$ est forcément connexe. Si k est pair, on écrit $k = 2^a k'$ avec k' impair. Alors, ou bien $X(\mathbb{R})$ est connexe ou bien le nombre de composantes connexes de $X(\mathbb{R})$ est égal à $2^{\varphi(k')}$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler [17].

Bibliographie

[1] Abikoff, W.: *The real analytic theory of Teichmüller spaces.* Lect. Notes Math. 820. Springer Verlag, 1980

[2] Alling, N. L., Greenleaf, N.: *Foundations of the theory of Klein surfaces.* Lect. Notes Math. 219. Springer Verlag, 1971

[3] Artin, M.: Théorème de Weil sur la construction d'un groupe a partir d'une loi rationelle. Dans: Demazure, M., Grothendieck, A.: *Schémas en Groupes II, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/1964, SGA 3* Lect. Notes Math. 152, Exposé XVIII. Springer Verlag, 1970

[4] Bobenko, A. I.: Schottky uniformization and finite-gap integration. *Soviet Math. Dokl.* 36 (1988), 38–42

[5] Bochnak, J., Coste, M., Roy, M.-F.: *Géométrie algébrique réelle.* Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Vol. 12. Springer Verlag, 1987

[6] Belokolos, E. D. et al.: *Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations.* Springer-Verlag, 1994

[7] Bers, L.: Correction to "Spaces of Riemann surfaces as bounded domains." *Bull. Amer. Math. Soc.* 67 (1961), 465–466

[8] Bujalance, E. et al.: *Automorphism groups of compact bordered Klein surfaces.* Lect. Notes Math. 1439. Springer Verlag, 1990

[9] Button, J.: All Fuchsian Schottky groups are classical Schottky groups. *Geometry and Topology Monographs* 1 (1998), 117-125

[10] Cirre, F. J.: On moduli of real algebraic curves. (en préparation)

[11] Deligne, P., Illusie, L.: Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham. *Invent. Math.* 89 (1987), 247–270

[12] Earle, C. J.: Moduli of surfaces with symmetries. *Advances in the theory of Riemann surfaces.* Ahlfors, L. V. et al. (eds) Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1971

[13] Earle, C. J.: Intrinsic coordinates on Teichmüller spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 83, 3 (1981), 527–531

[14] Greenberg, M. J., Harper, J. R.: *Algebraic topology.* Addison Wesley, 1981

[15] Grothendieck, A.: *Revêtements étales et groupe fondamental.* Lect. Notes Math. 224. Springer Verlag, 1971

[16] Hartshorne, R.: *Algebraic geometry.* Grad. Texts Math. 52. Springer Verlag, 1977

[17] Huisman, J.: On the number of components of real abelian varieties that admit sufficiently many complex multiplications. *Manuscripta Math.* 85 (1994), 165–175

[18] Huisman, J.: On real algebraic vector bundles. *Math. Z.* 219 (1995), 335–342

[19] Huisman, J.: A real algebraic vector bundle whose total space is affine is strongly algebraic. *Contemp. Math.* 182 (1995), 117–119

[20] Huisman, J.: Real algebraic differential forms on complex algebraic varieties. (soumis)

[21] Huisman, J.: Algebraic moduli of real elliptic curves. (soumis)

[22] Huisman, J.: Real quotient singularieties and nonsingular real algebraic curves in the boundary of the moduli space. (à paraître dans *Compositio Mathematica*)

[23] Huisman, J.: Real Teichmüller spaces and moduli of real algebraic curves. (à paraître dans *Contemp. Math.*)

[24] Huisman J. : The equivariant fundamental group, uniformization of real algebraic curves, and global complex analytic coordinates on Teichmüller spaces I. (soumis)

[25] Huisman J. : The equivariant fundamental group, uniformization of real algebraic curves, and global complex analytic coordinates on Teichmüller spaces II. (soumis)

[26] Huisman, J. : Strict uniformization of real algebraic curves and global real analytic coordinates on real Teichmüller spaces. *Rev. Mat. Complut.* 12, 1 (1999)

[27] Huisman J. : Schottky uniformization of real algebraic curves and an application to moduli. (soumis)

[28] Huisman, J. : On spaces of $PSL_2(\mathbb{C})$-representations of extended quasi-Fuchsian groups. (soumis)

[29] Huisman, J. : Classification of extended quasi-Fuchsian groups. (en préparation)

[30] Huisman, J. : The algebraic fundamental group of a real algebraic curve determines its topological type. (en préparation)

[31] Koebe, P. : Ueber die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven. *Nachr. Akad. Wiss. Goettingen* (1907), 177-190

[32] Koebe, P. : Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven I & II. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* (1907), 191–210 et (1907), 633–669

[33] Kra, I. : Deformation spaces. *A crash course on Kleinian groups.* L. Bers, I. Kra (eds). Lect. Notes Math. 400, Springer Verlag, 1974, 48–70

[34] Marinari, M. G., Raimondo, M. : Fibrati vettoriali su varietà algebriche definite su corpi non algebricamente chiusi. *Boll. Unione Mat. Ital., V Ser., A,* 16, 128–136 (1979)

[35] Maskit, B. : Moduli of marked Riemann surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974), 773–777

[36] Maskit, B. : *Kleinian groups.* Springer Verlag, 1988

[37] Maskit, B. : On extended quasifuchsian groups. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* Ser. A I 15, 1 (1990), 53-64

[38] Maskit, B.: Special uniformizations of symmetric Riemann surfaces. (unpublished)

[39] Milne, J. S.: *Etale cohomology.* Princeton University Press, 1980

[40] Mumford, D.: *Abelian Varieties.* Oxford University Press and Tata Institute of Fundamental Research, 1970

[41] Mumford, D.: *Curves and their Jacobians.* The University of Michigan Press, 1976

[42] Mumford, D., Fogarty, J.: *Geometric invariant theory (second enlarged edition).* Ergeb. Math. 34. Springer Verlag, 1982

[43] Nag, S.: *The complex analytic theory of Teichmüller spaces.* John Wiley & Sons, 1988

[44] Natanzon, S. M.: Klein surfaces. *Uspekhi Mat. Nauk.* 45:6 (1990), 47–90

[45] Poincaré, H.: Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. *Acta Math.* 31 (1907), 1–64

[46] Purzitsky, N.: A cutting and pasting of noncompact polygons with applications to Fuchsian groups. *Acta Math.* 143, 3-4 (1979), 233–250

[47] Scheiderer, C.: *Real and etale cohomology.* Lect. Notes Math. 1588. Springer Verlag, 1994

[48] Seppälä, M., Silhol, R.: Moduli spaces for real algebraic curves and real abelian varieties. *Math. Z.* 201 (1989), 151–165

[49] Seppälä, M.: Moduli spaces of stable real algebraic curves. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* 4e série t. 24 (1991), 519–544

[50] Silhol, R.: *Real algebraic surfaces.* Lect. Notes Math. 1392. Springer Verlag, 1989

[51] Weichold, G.: Über symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung. *Zeit. f. Math. u. Phys.* 28 (1883), 321–351

[52] Wells, R. O.: *Differential Analysis on Complex Manifolds.* Grad. Texts in Math., Vol. 65. Springer Verlag, 1980