Ecoulement d'un Liquide à frontière mobile

Johannes Huisman
Université de Brest

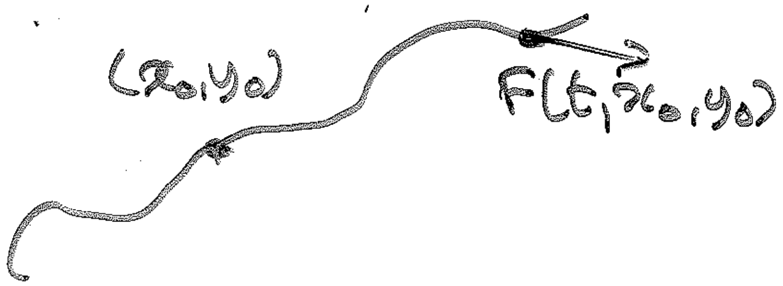
§1 Introduction

Liquide : $D \subseteq \mathbb{R}^2$
ouvert connexe
∂D C^∞

Déf. Un écoulement de D est une famille $F(t,\cdot) : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ C^∞ de difféo préservant l'orientation tq. $F(0,\cdot)$ est l'inclusion de D dans $\mathbb{R}^2$.

Associé à un écoulement F :
champs de vecteur de vitesse :

$$v(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t} F(t,x,y) \in \mathbb{R}^2$$



Lorsque $F(t,D) = D$
pour tout $t \in \mathbb{R}$:

EDP d'Euler en v.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_v v = -\operatorname{grad} p$$

(non visqueux)

EDP Navier-Stokes cas (visqueux)

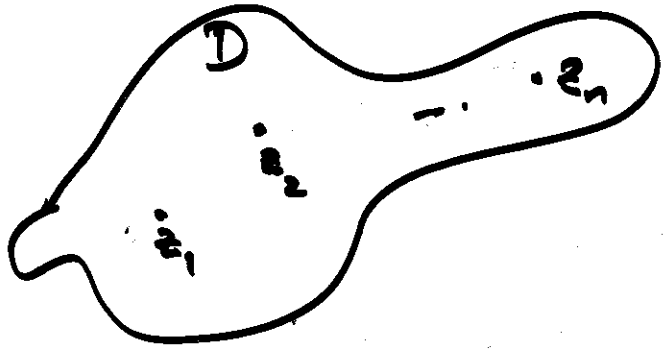
Ici : $F(t,D) \neq D$.

Plus précisément :

Soient $z_1 \dots z_n \in D$ "puits ou sources" et "fonction débit" :

$q_1, \dots q_n$. $\quad q_i = q_i(t)$.

Ecoulement de $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ sous l'action d'injecter en z_j

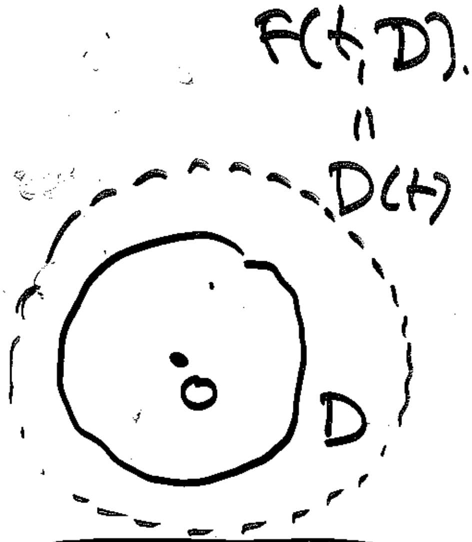


avec débit q_j.

Ex. $D = B(0, 1)$

$n=1, \; z_1 = 0.$

$q_1 = cst > 0.$



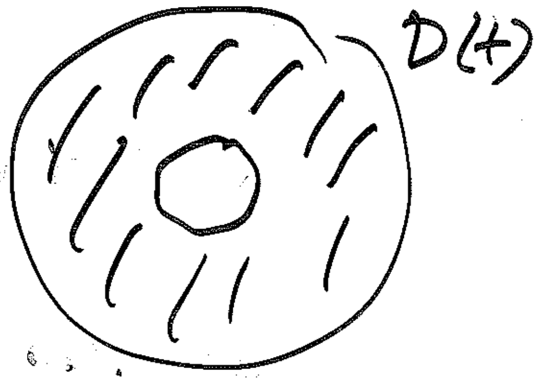
$$D(t) = B(0, R(t)) \setminus \overline{B(0, r(t))}$$

Aire $D(t) =$

$= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi = $ Aire $D(0)$

et $\pi r^2 = q_1 t.$

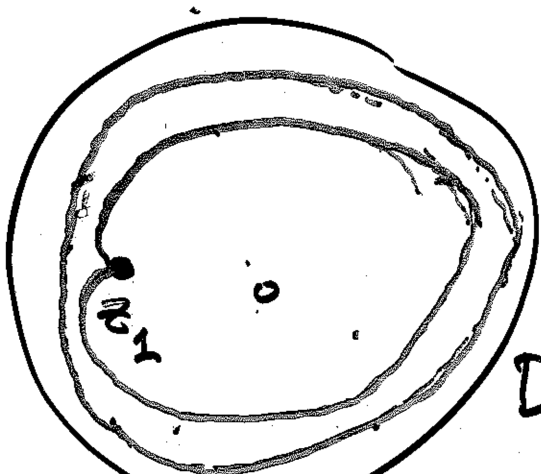


$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{q_1 t}{\pi}} \qquad R = \sqrt{1 + \frac{q_1 t}{\pi}}$$

$$D(t) = \cancel{B(0,} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{q_1 t}{\pi} \leq x^2 + y^2 < 1 + \frac{q_1 t}{\pi} \right\}$$

On s'intéressera au bord $\partial D(t)$ du domaine $D(t)$

Th. (Kufarev-Richardson)
Si $\partial D(0)$ est algébrique, alors $\partial D(t)$ est algébrique.
De plus si $\partial D(0)$ est de degré $\leq d$, alors $\partial D(t)$ est de degré $\leq d+n$



$D(0) = B(0,1)$
$n = 1$
$q_1 = \text{cste} < 0.$

§2 L'incompressibilité.

Soit $F(t,\cdot) : D \to \mathbb{R}^2$ un écoulement. et $v(t,\cdot)$ le champ de vect. associé.

<u>Déf</u> F est un écoulement <u>incompressible</u> de D si $F(t,\cdot)$ préserve les volumes quelque soit t, c-à-d,

$\forall A \subseteq D \quad \forall t \in \mathbb{R}$:

$$\underset{\text{aire}}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{vol}}}\big(F(t,A)\big) = \mathrm{vol}(A).$$

<u>Prop.</u> F est incompressible ssi $\det\left(J_{F(t,\cdot)}\right) = 1$ quelque soit t.

<u>Rappel</u> : $$J_{F(t,\cdot)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

<u>Démo.</u> exo. (indication : chgt de variables).

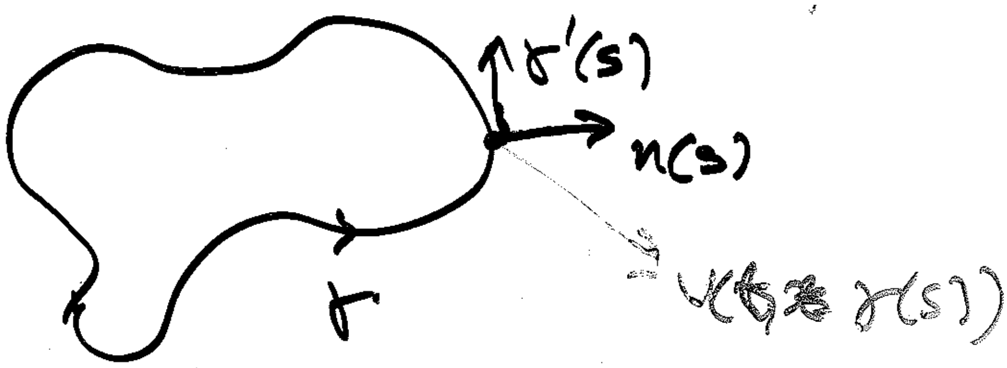
<u>Def</u> la <u>divergence</u> de v

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

<u>Def.</u> la <u>circulation</u> de l'écoulement à travers d'un contour simple γ :

$$C(\gamma) = \int_\gamma \langle v, n \rangle \, dl$$

où



$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad C^\infty.$$

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

$\|\gamma'(s)\| = 1.$ paramétré par longueur d'arc.

$n(s)$ vecteur normal unitaire extérieur

$$n(s) = (\gamma_2'(s), -\gamma_1'(s)).$$

Prop. $\displaystyle\int_\gamma \langle v, n\rangle \, d\ell = \int_\gamma \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial t} dy - \frac{\partial f_2}{\partial t} dx}_{\text{forme diff. globale!}}.$

Démo: $\displaystyle\int_\gamma \langle v, n\rangle \, d\ell =$

$$= \int_a^b \langle v(\gamma(s)), n(\gamma(s))\rangle \, ds =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial t}(\gamma(s)) \cdot \gamma_2'(s) + \frac{\partial f_2}{\partial t}(\gamma(s)) \cdot (-\gamma_1'(s)) \, ds.$$

$$= \int_a^b \gamma^*\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} dy\right) - \gamma^*\left(\frac{\partial f_2}{\partial t} dx\right)$$

$$= \int_\gamma \frac{\partial f_1}{\partial t} dy - \frac{\partial f_2}{\partial t} dx. \qquad \blacksquare$$

Thm $\forall \gamma : c(\gamma) = 0$ est équi à $\operatorname{div}(v) \equiv 0$.

Demo.

$$d\left(\frac{\partial F_1}{\partial t} dy - \frac{\partial F_2}{\partial t} dx \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial t} dx \wedge dy - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial t} dy \wedge dx$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial t} \right) dx \wedge dy.$$

$$= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

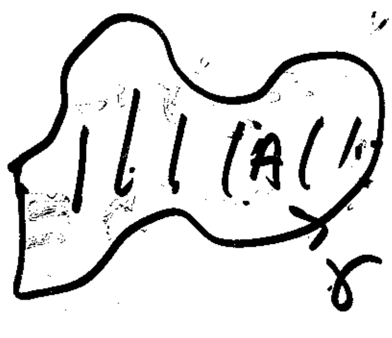
$$= \operatorname{div}(v)\ dx \wedge dy.$$

Stokes:

$$C(\gamma) = \int_\gamma \frac{\partial F_1}{\partial t} dy - \frac{\partial F_2}{\partial t} dx =$$

$$= \int_A \operatorname{div}(v)\ dx\,dy.$$

$\partial A = \gamma.$



$\square$

<u>Th.</u> Les conditions suivantes sont équivalentes :

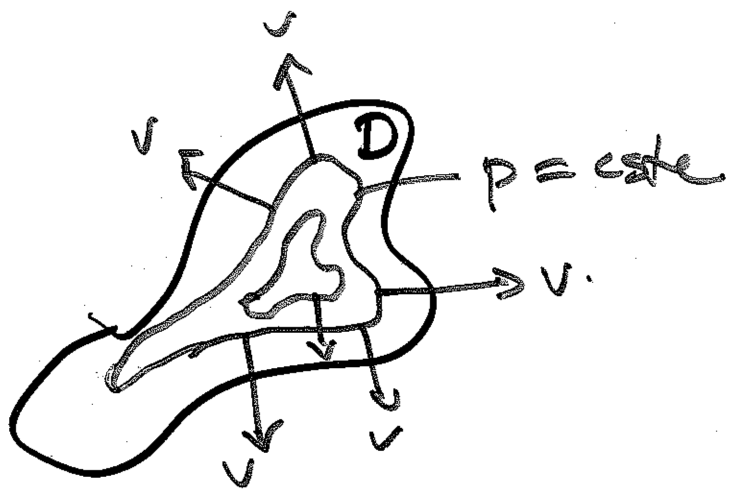
1) F est incompressible
2) $\det(J_{F(t,\cdot)}) \equiv 1$
3) $\mathrm{div}(V) \equiv 0$.
4) $C(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma$.

On dit dans ce cas que l'écoulement est incompressible. <u>Hypo d'incompressibilité</u>

La <u>loi de Darcy</u> :

$$V = -K \,\mathrm{grad}(p) \qquad K > 0$$

où p est la pression. $p_t : D \to \mathbb{R}$.



$K = k/\mu$ $\qquad$ μ est la viscosité du liquide

k = cste dépend du milieu poreux. > 0

Avec $\Phi = -kp$:

$$v = \operatorname{grad}(\Phi)$$

Comme v est incompress. :

$$0 = \operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi = \Delta \Phi.$$

Δ est le laplacien.

$\Rightarrow$ Φ est harmonique

Th. v incompress. $\Leftrightarrow$ Φ harmonique

Modèle. local d'un puit ou source.

le cas simple : $z_0 = 0$. $(n=1)$.

fonction débit q_1

$$v = \frac{q_1}{2\pi}\frac{z}{|z|^2} \qquad z = x+iy.$$

Calculons

$$C(\gamma) = \int_\gamma \langle v, n\rangle \, dl$$

$$C(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{Re}(v\cdot\overline{n})\,dl =$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}\left(v(\gamma(s)) \cdot \overline{(-i\gamma'(s))}\right) ds.$$

$$= \mathrm{Re} \int_a^b \overline{v(\gamma(s))} \cdot \left(-i\,\gamma'(s)\right) ds$$

$$= \mathrm{Im} \int_a^b \overline{v(\gamma(s))} \cdot \gamma'(s)\, ds \;!$$

$$= \mathrm{Im} \int_\gamma \overline{v}\, dz$$

$$= \mathrm{Im} \int_\gamma \overline{\left(\frac{q_1}{2\pi}\,\frac{z}{|z|^2}\right)}\, dz$$

$$= \mathrm{Im} \int_\gamma \frac{q_1}{2\pi}\,\frac{1}{z}\, dz.$$

$$= \mathrm{Im}\, \frac{q_1}{2\pi}\cdot 2\pi i = q_1 \;!$$

De plus : $\mathrm{div}(v) = 0$!

En fait $v = \mathrm{grad}\,\Phi$

où $\Phi = \frac{q_1}{2\pi} \log|z|$.

En effet :

$$\mathrm{grad}\,\Phi = 2\cdot\frac{\partial}{\partial \bar z}\Phi$$

rappel $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Or

$$2\frac{\partial}{\partial \bar z}\Phi = 2\frac{\partial}{\partial \bar z}\,\frac{q}{2\pi}\log|z| =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \bar z}\log(z\bar z) =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\cdot\frac{1}{z\bar z}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar z}(z\bar z) =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\cdot\frac{1}{z\bar z}\cdot z = \frac{q}{2\pi}\frac{z}{|z|^2} =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\cdot\frac{1}{\bar z} = v.\ !$$

Vérifions que Φ est harmonique (et donc que v est incompress.)

$$\Delta\Phi = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar z}\Phi.$$

Rappel $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)}$

Or

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar z}\Phi = \frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar z}\frac{q}{2\pi}\log|z|$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\frac{q}{2\pi}\cdot\frac{1}{\bar z} = 0.$$

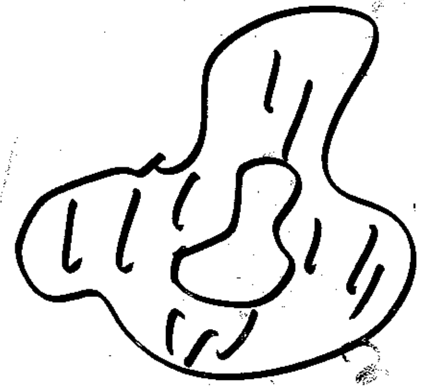
Retour au cas de n sources :

$$v = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \frac{1}{\bar{z}_j} \quad (+ \text{ champ de vect. à } \operatorname{div} = 0)$$

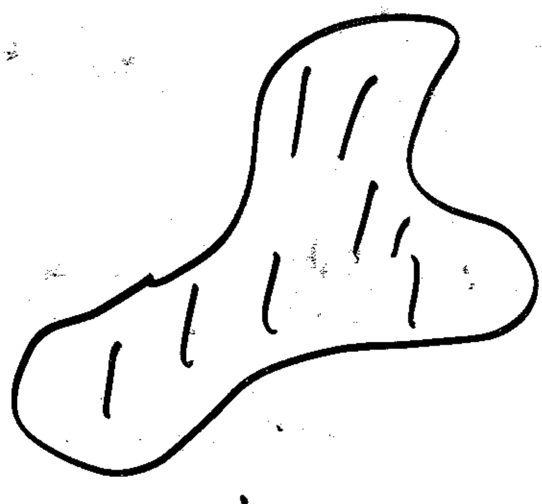
est le champ de vecteur de vitesse associé à l'écoulement de D. Défini sur $D \setminus \{z_1 \dots z_n\}$

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \log |z_j| \quad (+ \text{ fct. harmonique en } D)$$

On suppose D simplement connexe (D n'a pas de trou, ou encore D est contractile)



X



OK

i.e ∂D est connexe

$\Rightarrow$ pression constante sur ∂D.

Comme ∂D ~~connexe~~ toute composante connexe du

pression = cst.

On peut supposer $\Phi \equiv 0$ sur ∂D.

<u>Question</u> décrire l'évolution de ∂D étant donné $z_1 \ldots z_n$ et $q_1 \ldots q_n$.

§2. Th. de Richardson

Def. : $D \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ u harmonique sur un ouvert contenant $\bar{D}$. le moment de D. par rapport à u est

$$\int_D u \, dx dy .$$

Si $u = z^k$ où $k \in \mathbb{N}$

$$M_k(D) = \int z^k \, dx dy$$

s'appelle le k-ième moment du D. Le 0-ième moment du D est l'aire de D. la suite des moments de D est

$$(M_0(D), M_1(D), \ldots)$$

<u>Th.</u> (de Richardson 1972.)

u harmonique sur $\overline{D(t)}$ quelque soit t.

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} u \, dx dy = \sum_{j=1}^{n} q_j \cdot u(z_j)$$

<u>Corollaire</u> :

$$\int_{D(t)} u \, dx dy = \sum_{j=1}^{n} u(z_j) \int_0^t q_j \, d\tau + \int_{D(0)} u \, dx dy.$$

Donc les moments de $D(t)$ se calculent en fonctions des moments du domaine initiale $D(0)$ et les q_j.

Ex. $u \equiv 1$

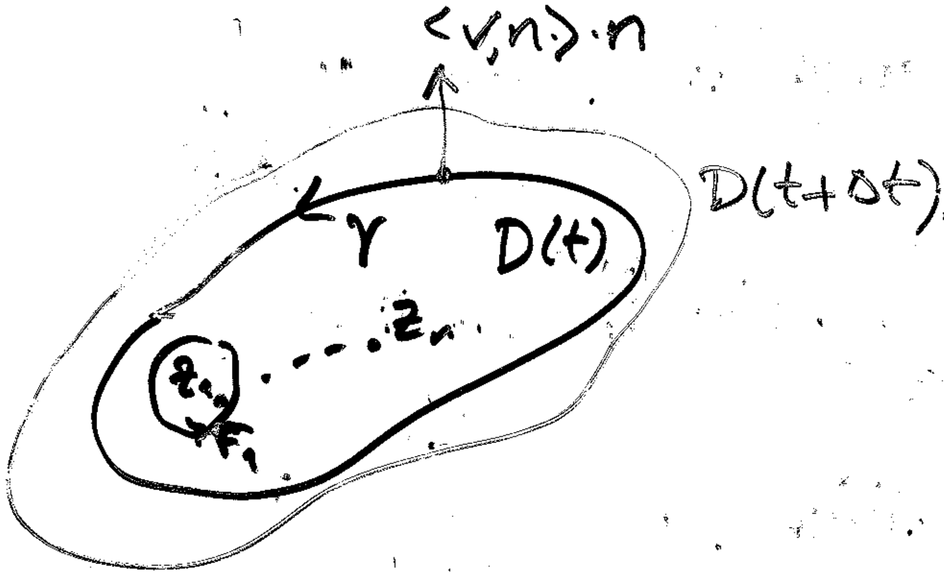
$$\int_{D(t)} u\,dx\,dy = \text{aire } D(t)$$

$$\sum_{j=1}^{n} u(z_j) \int_0^t q_j(\tau)\,d\tau + \int_{D(0)} u\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_0^t q_j(\tau)\,d\tau + \text{aire}(D(0)).$$

On a bien égalité car l'aire de $D(t)$ = l'aire $D(0)$ + la quantité du liquide injectée.

Démo. du Th. de Richardson



$$\int_{D(t+\delta t)} u \, dx dy =$$

$$= \int_{D(t)} u \, dx dy + \int_{D(t+\delta t) \setminus D(t)} u \, dx dy$$

$$= \int_{D(t)} u \, dx dy + \int_{\gamma} u \langle v,n\rangle \, dl. + \underset{\delta t \to 0}{o(\delta t)}$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} u \, dx dy = \int_{\gamma} u \langle v,n\rangle \, dl$$

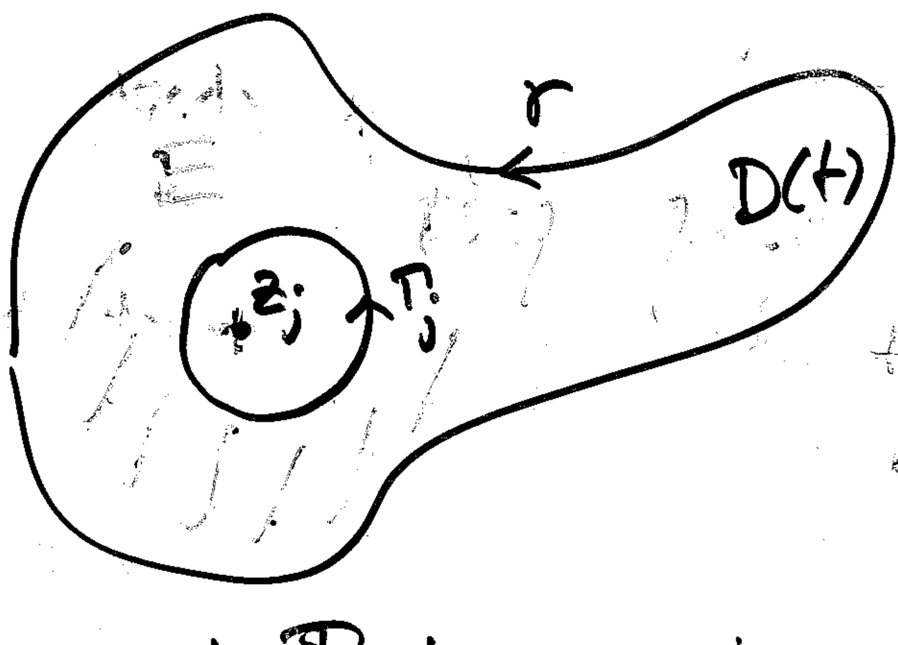
Retrancher : $\int_{\gamma} \Phi \langle \operatorname{grad} u, n\rangle \, dl. \; (=0)$

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)} u\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\partial D(t) = \gamma} \left(u \langle \operatorname{grad} \Phi, n \rangle - \Phi \langle \operatorname{grad} u, n \rangle \right) dl$$

$$\overset{\text{stokes}}{=} \int_E \operatorname{div} \left(u \operatorname{grad} \Phi - \Phi \operatorname{grad} u \right) dx\,dy$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} u \langle \operatorname{grad} \Phi, n \rangle - \Phi \langle \operatorname{grad} u, n \rangle \, dl.$$



Comme u et Φ harmonique dans E $\int_E = 0$. De plus

$$\int_{\Gamma_j} u \langle \operatorname{grad} \Phi, n \rangle \, dl \longrightarrow u(z_j) \cdot q_j$$

$$\int_{\Gamma_j} \Phi \langle \operatorname{grad} u, n \rangle \, dl \longrightarrow 0 \qquad \boxtimes$$

<u>Pb.</u> de Richardson à propos des moments :
Reconstruire un domaine D à partir de la suite des moments $(M_k(D))_{k\in\mathbb{N}}$.

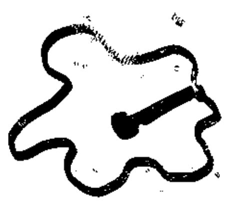
<u>Th</u> (Novikov) Soit D et D' des domaines étoilés (donc

étoilé   non étoilé.

simplement connexes)
Si $M_k(D) = M_k(D')$ quelque soit k, alors $D = D'$. ∎

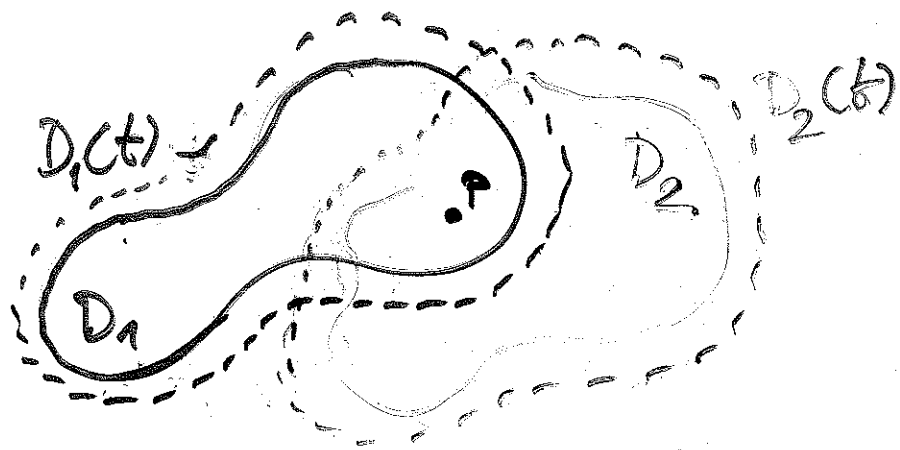
<u>Ex</u>: Soit $f(\theta) \geq 0$. f continue $f(0) = f(2\pi)$

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq f(\arg(z)) \} \cup \{0\}.$$



Ex. (Sakai) $\exists$ D, D' domaines simplement connexes avec les même moments D $\neq$ D'.

Construisons un tel exemple en utilisant le corollaire du Th. de Richardson :



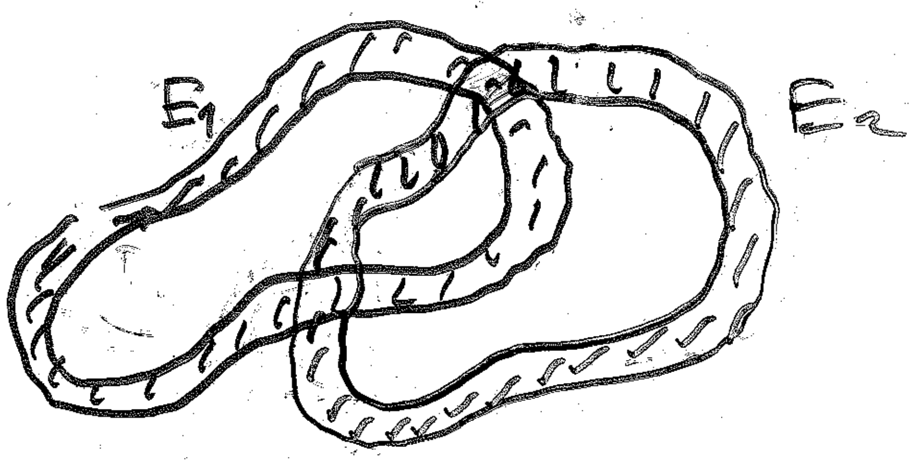
Soit $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ des domaines s'intersectant. et $P \in D_1 \cap D_2$.
Soit P la source à débit $q = \text{cste} > 0$. $\rightsquigarrow D_1(t), D_2(t)$
D'après R. :

$$M_k(D_1(t)) = M_k(D_1(0)) + p^k \cdot qt$$
$$M_k(D_2(t)) = M_k(D_2(0)) + p^k \cdot qt.$$

Soit $E_1 = D_1(t) \setminus D_1(0)$

$E_2 = D_2(t) \setminus D_2(0)$

$$M_k(E_1) = M_k\, D_1(t) - M_k\, D_1(0)$$
$$= M_k\, D_2(t) - M_k\, D_2(0)$$
$$= M_k(E_2) \quad !$$



$F_1 = E_1 \setminus ////$

$F_2 = E_2 \setminus ////$

F_1 et F_2 sont simplement connexes

et $M_k(F_1) = M_k(F_2) \quad \forall k!$

Th (Etingof) (unicité locale)

Suppose que $D(s)$ est une famille C^∞ de domaine

Si $M_k(D(s))$ ~~ne dépe~~ $=$ cste pour tout k, alors $D(s) =$ cste.

Corollaire : $D(t)$ est une famille satisfaisant le corollaire du th. de Richardson c-à-d il existe $z_1 \dots z_n \in D(t)$ et $q_1 \dots q_n$ tq

$$\int_{D(t)} u \, dx dy = \int_{D(0)} u \, dx dy + \sum_{j=1}^{n} u(z_j) \int_0^t q_j \, d\tau .$$

Alors $D(t)$ est obtenu à partir de D par l'écoulement défini ci-dessus.

Corollaire : $D(t)$ ne dépend pas de q_j mais slt de $\int_0^t q_j(\tau) d\tau$!

§3 Domaines algébriques

Th. de Riemann ~~de~~ (uniformisation)

Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ domaine simplement connexe

Supposons que $\# \partial D > 1$.

Alors il existe une application biholomorphe

$$f : B(0,1) \longrightarrow D$$

où $B(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$.

Déf Dans le cas ci-dessus on dit que f est une uniformisation de D.

Une uniformisation n'est pas unique : si f en est une $f \circ \alpha$ en est une aussi, pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}(B(0,1))$.

Si on précise

$f(0) \in D$ et $f'(0)$,

l'uniformisation est unique :

Si $f, g : B(0,1) \to D$

deux uniformisations avec

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f'(0) = g'(0)$$

alors $f = g$.

<u>Def</u> On dit que D est <u>algébrique</u> s'il existe une uniformisation $f : B(0,1) \to D$ tq. f est une fonction rationnelle :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

où P, Q polynômes en z.

P, Q premiers entre eux.

Dans ce cas, toutes les uniformisations de D sont algébriques. c-à-d rationnelles.

$\deg(f) = \max(\deg P, \deg Q)$.

$\deg(D) = \deg(f)$.

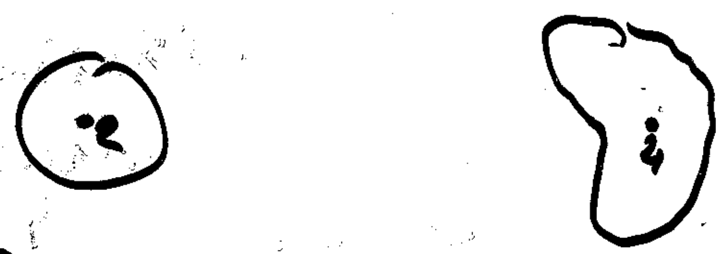
Exemples.

1). $B(0,1)$, ou plus généralement $B(a,R)$, est algébrique de deg 1.

2). Soit f une fonction rationnelle quelconque sans pôles ni points de ramification en $\overline{B(0,1)}$. (c-à-d, $f' \neq 0$ dans $\overline{B(0,1)}$). Si $f|B(0,1)$ est injective, alors $D = f(B(0,1))$ est algébrique et de degré $\leq \deg(f)$.

Explicitement :

$f(B(2,1))$ où $f(z) = z^2$



$B(2,1)$ $\qquad\qquad$ $f(B(2,1))$.

Remarque : les domaines algébriques sont "denses" dans les domaines bornés simplement connexes.

Def. Une *courbe algébrique réelle* C dans $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des solutions d'une équation polynomiale de la forme

$$F(x,y) = 0.$$

où F est un polynôme réel en x,y. On note

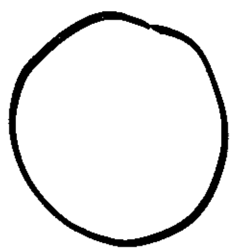
$$Z(F) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}.$$

l'ensemble des zéros de F, $Z(F)$ est une courbe algébrique réelle. On suppose $\#C = \infty$. et F irréductible.

$\deg(C) = \deg(F)$.

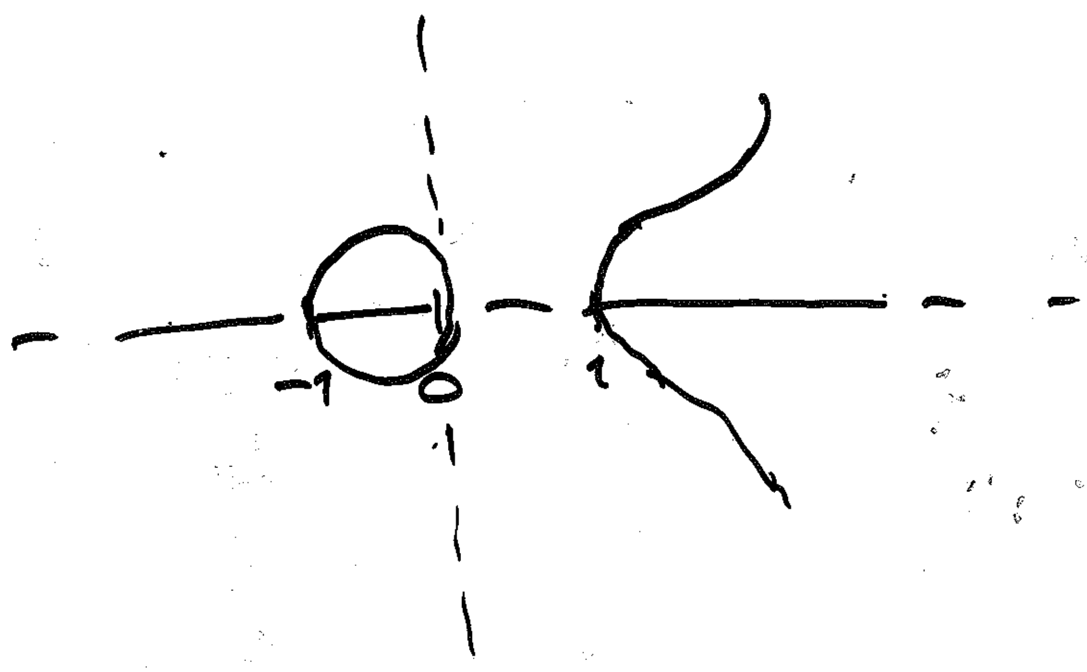
Examples.

1) $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

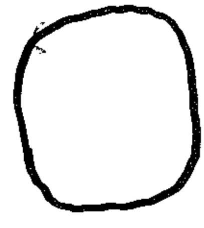


2) $Z(y^2 - x^3 + x)$

$= \{(x,y) \mid y^2 = x^3 - x\}$



3) $x^4 + y^4 = 1$



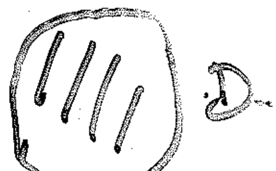
<u>Prop.</u> Si D est un domaine algébrique, ∂D est une courbe algébrique réelle. De plus

$$\deg(\partial D) \leq 2 \deg(D).$$

<u>Démo</u> : utiliser les outils standards de la géométrie algébrique

<u>Remarque</u> la réciproque est fausse : Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1\}.$$



∂D est une courbe algébrique réelle. Mais D n'est pas un domaine algébrique.

$$\left.\begin{array}{l} g(S^1) = 0. \\ g(\partial D) = 3. \end{array}\right\}$$

toute appl. alg. de S^1 dans ∂D est constante.

<u>Th.</u> (Kufarev - Richardson)
Soit $D = D(0)$ algébrique.
$z_1, \ldots, z_n \in D$, $q_1, \ldots, q_n$ fonctions débit. Soit $d = \deg(D(0))$.
Alors $D(t)$ est encore algébrique
De plus,

$$\deg D(t) \leq d + n.$$

On aura besoin du transformé de Cauchy d'un domaine:

<u>Déf.</u> Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine borné. le <u>transformé de Cauchy</u> de D est la fonction h_D définie par

$$h_D(w) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{dx\,dy}{w - z}$$

$h_D(w)$ est le moment de D par rapport à la fonction $z \mapsto \frac{1/\pi}{w-z}$ harmonique
lorsque $w \notin \overline{D}$.

Richardson : $w \notin \overline{D}$.

$$\frac{d}{dt} h_{D(t)}(w) = \sum_{j=1}^{n} q_j \cdot \frac{1}{\pi(w-z_j)}$$

Prop. : le transformée de Cauchy h_D a les propriétés suivants :

1) h_D est holomorphe en dehors de $\overline{D}$, $\lim_{w\to\infty} h_D(w) = 0$;
h_D continue sur $\mathbb{C}$.

2). $h_D(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k(D)}{w^{k+1}}$ $\quad |w| \gg 0$.

3) $h_D(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\bar{z}\, dz}{w-z}$ $\quad (w \notin \overline{D})$.

4) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\bar{z} - h_D(z)}{w-z}\, dz \equiv 0.$ $\quad (w \notin \overline{D})$

5) $h_{D(t)}(w) = h_{D(0)}(w) + \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j t}{\pi(w-z_j)}$.

6) $h_{D(t)}$ est rat. ssi $h_{D(0)}$ est rat.
Dans ce cas
$$\deg h_{D(t)} \leq \deg h_{D(0)} + n$$

Démo : 1). exo.

2) $$u_D(w) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{dx\,dy}{w-z} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{w}\int_D \frac{dx\,dy}{1-\frac{z}{w}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{w}\int_D \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^k dx\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{w^k}\int_D z^k\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{w^{k+1}}\,M_k(D).$$

3). Pour $w \notin \overline{D}$

$\frac{\bar z\,dz}{w-z}$ est 1-forme sur $\overline{D}$.

$$d\left(\frac{\bar z\,dz}{w-z}\right) = \frac{d\bar z\wedge dz}{w-z} = \frac{2i\,dx\wedge dy}{w-z}.$$

$dz = dx + i\,dy$

$d\bar z = dx - i\,dy$.

Stokes :

$$u_D(w) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{dx\,dy}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\bar z\,dz}{w-z}.$$

n). On montre que

$$h_D(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{h_D(z)}{w-z}\, dz$$

On suppose $0 \in D$.

$w \notin \overline{D}$.

h_D n'est pas holomorphe dans $\overline{D}$!

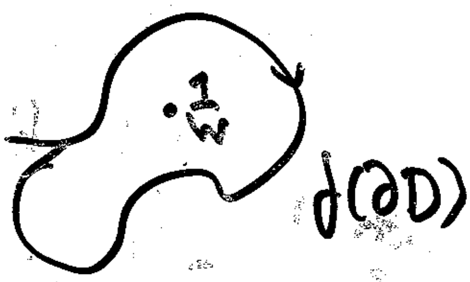
Changement de variable :

$f(z) = \frac{1}{z}$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{h_D(z)}{w-z}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\partial D)} \frac{h_D(1/z)}{w - \frac{1}{z}} \cdot \frac{(-dz)}{z^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-f(\partial D)} \frac{1}{w} \frac{h_D(1/z)/z}{z - \frac{1}{w}}\, dz$$



$h_D(1/z)/z$ holomorphe dans ~~$f(\overline{D})$~~ $f(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) \cup \{0\}$.

D'après Cauchy :

$$= \frac{1}{w} h_D(w) \cdot w = h_D(w).$$

Du coup,

$$h_D(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{h_D(z)}{w-z} dz$$

D'après le 3 :

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{z} - h_D(z)}{w-z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{z}\, dz}{w-z} +$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int \frac{h_D(z)}{w-z} dz = h_D(w) - h_D(w)$$

$$= 0.$$

5) Richardson

6) conséquence du 5.

PB

Théorème de correspondance des singularités.

Soit $f : B(0,1) \to D$ unif. et h_D le transformé de Cauchy de D. On suppose que f s'étend à une fonction continue

$$f : \overline{B(0,1)} \to \overline{D}$$

1). la fonction $\psi(\xi) = \overline{f(1/\bar{\xi})} - h_D(f(\xi))$

sur $\partial B(0,1) = S^1$ s'étend ~~à une~~ de manière continue à une fonction holomorphe dans $B(0,1)$

2) f est rationnelle ssi h_D est rationnelle.

3) Dans ce cas

$$\{\text{sing}^{\text{s}} f\} \longrightarrow \{\text{sing}^{\text{s}} h_D\}$$
$$\xi \longmapsto f(1/\bar{\xi})$$

~~De plus~~ est une bijection.

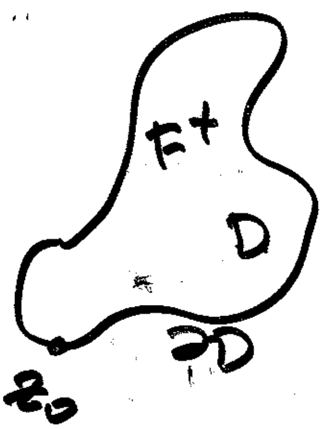
De plus $\text{mult}_\xi f = \text{mult}_{f(1/\bar{\xi})} h_D$
$\text{Res}_\xi \qquad = \text{Res}_{f(1/\bar{\xi})}$

En particulier
$$\deg(f) = \deg(h_D).$$

<u>Démo.</u>: la formule de Sokhotskii - Plemelj :

Soit φ continue sur ∂D.

Soit $$F^+(z) = \int_{\partial D} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad (z \in D)$$
$$F^-(z) = \int_{\partial D} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \quad (z \notin \bar{D})$$



F^- la formule de S-P :

Si $z_0 \in \partial D$.

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} F^+(z) - \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \notin \bar{D}}} F^-(z) = 2\pi i\, \varphi(z_0)$$

(voir Markushevich, par exemple.)

En particulier, si $F^-(z) \equiv 0$, φ s'étend de manière continue à $\bar{D}$ ~~avec xx~~, holomorphe sur D.

Effectivement: l'extension est
$$F^+(z)/2\pi i$$

Appliquer à

$$\varphi(z) = \frac{\bar{z} - h_D(z)}{\cancel{\quad}} \qquad w \notin \bar{D} \text{ fixe}$$

φ est continue sur ∂D.

D'après le 4 ci-dessus,

$$F^- \equiv 0.$$

Du coup, $z \mapsto \bar{z} - h_D(z)$ sur ∂D s'étend à une fonction holomorphe sur D.

Comme $f : B(0,1) \to D$ biholomorphe,

$$\xi \longmapsto \overline{f(\xi)} - h_D(f(\xi)) \quad \text{sur } S^1$$

s'étend à une application holomorphe sur $B(0,1)$.

Si $\xi \in S^1$, $1/\bar{\xi} = \xi$.

Du coup

$$\xi \longmapsto \overline{f(1/\bar{\xi})} - h_D(f(\xi))$$

sur S^1 s'étend à une application holomorphe sur $B(0,1)$. D'où le 1.

38

2. Supposons que f est rationnelle. On montre que h_D est rationnelle

Comme f est rat.,

$$\xi \mapsto \overline{f(1/\bar{\xi})}$$

est méromorphe dans $B(0,1)$

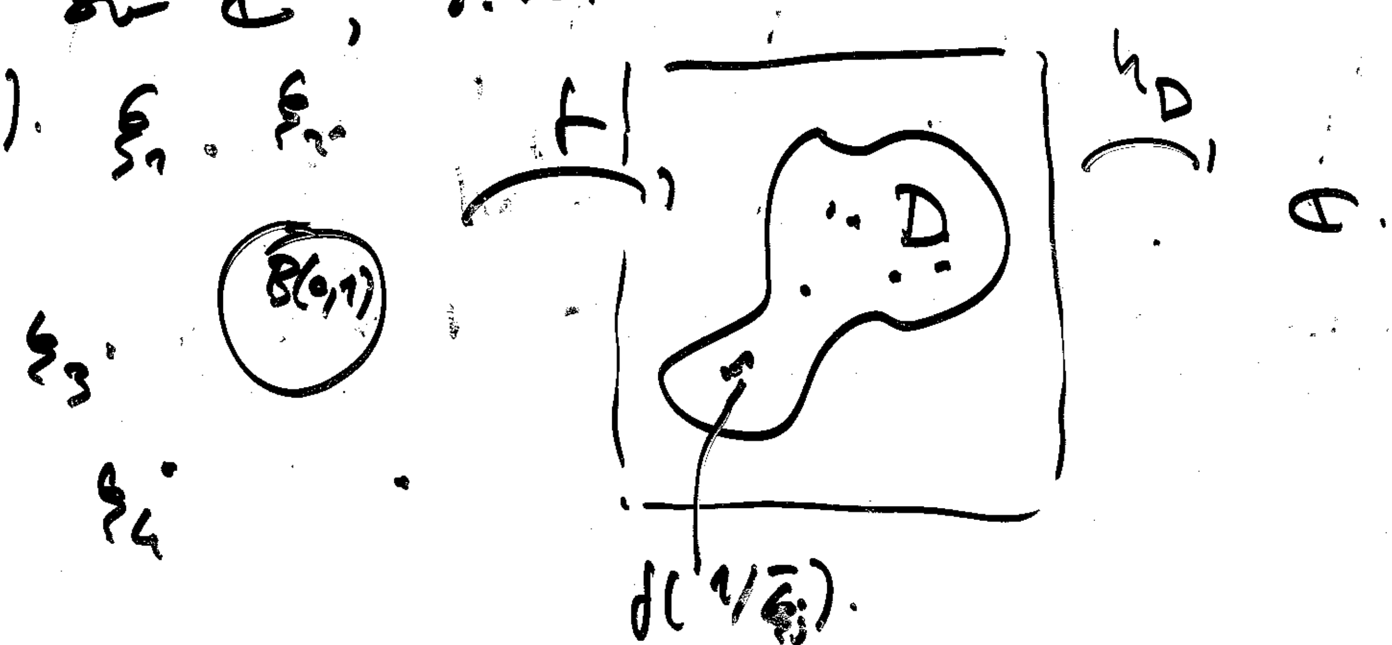
Comme $\xi \mapsto \overline{f(1/\bar{\xi})} - h_D(f(\xi))$ sur S^1 s'étend à une fonction holomorphe sur $B(0,1)$,

$h_D(f(\xi))$ sur S^1 s'étend méro~~holom~~ à $B(0,1)$. Comme f est biholomorphe sur $B(0,1)$ h_D sur ∂D s'étend à une application méromorphe sur D. Comme $h_D \to 0$ loc à l'infini et h_D holomorphe a $\mathbb{C} \setminus \bar{D}$, h_D est méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. D'où h_D est rationnelle.

Réciproquement supposons que h_D est rationnelle. Donc $h_D(f(\xi))$ est méromorphe sur $B(0,1)$. Comme

$$\xi \underset{\partial B(0,1)}{\longmapsto} \overline{f(1/\bar{\xi})} - h_D(f(\xi))$$

ξ sur $\partial B(0,1)$ s'étend à une fonction holom. sur $B(0,1)$, $\xi \mapsto \overline{f(1/\bar{\xi})}$ s'étend à une fonction méromorphe sur $B(0,1)$. f est méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(0,1)}$ et f est holomorphe sur $B(0,1)$ et f continue sur un voisinage de $\partial B(0,1)$, f méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$, i.e. rationnelle.

3). 

Si ξ est une singularité de f, $1/\bar{\xi}$ est sing de $f(1/\bar{\xi})$ Donc $1/\bar{\xi}$ est sing de $h_D \circ f$ i.e, $f(1/\bar{\xi})$ est sing de h_D.

De plus

$$\mathrm{mult}_\xi f = \mathrm{mult}_{f(1/\bar{\xi})} h_D$$

et

$$\mathrm{Res}_\xi f = \mathrm{Res}_{f(1/\bar{\xi})} h_D$$

PB

<u>Démo</u> du Th de Kuparev-Richardson

Soit $f : B(0,1) \longrightarrow D(0)$ rationnelle. D'après le Th de correspondance, $h_{D(0)}$ est rationnelle. D'après la Prop, $h_{D(t)}$ est rat. Soit $f_t : B(0,1) \to D(t)$ une uniformisation de $D(t)$. D'après le Th. de correspondance f_t est rat. D'où $D(t)$ algébrique.

De plus,

$$\deg(f_t) \overset{\text{Th. corr.}}{=} \deg(h_{D(t)}) \overset{\text{Prop.}}{\leq}$$

$$\leq \deg h_{D(0)} + n$$

$$\overset{\text{Th. corr.}}{=} \deg f_0 + n.$$

D'où $\deg D(t) = \deg f_t \leq$

$$\leq \underbrace{\cancel{\deg f_0^n}}_{\deg f_0 + n} = \deg D(0) + n.$$

Ex.

$$D(0) = B(a, R) \qquad |a| < R$$

$$n = 1, \quad z_1 = 0 \in D(0)$$

$$q_1 = \text{cste.}$$

$D(t) = ?$

D'après le Th. $D(t)$ alg.

$$\deg D(t) \leq \deg D(0) + 1$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

$\deg(\partial D) \leq 4$..

Soit D domaine algébrique
On suppose que h_D n'a que des pôles simples.

$$h_D(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{z - B_j} \quad \text{où } A_j, B_j \in \mathbb{C}.$$

Supposons que $0 \in D$
$f : B(1,0) \to D$ uniformisation avec $f(0) = 0$. D'après le Thm de correspondance des singularités

$$\overline{f(1/\bar{\xi})} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{C_j}}{\xi - \overline{E_j}}$$

où $C_j, E_j \in \mathbb{C}$. D'où

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{1 - E_j \xi}$$

~~Car~~ $\overline{f(1/\bar{\xi})}$ et $h_D \circ f$ ont les même pôles, de même ordre et de même résidu.

On a

$$(*) \quad \boxed{f(E_j) = B_j \qquad j = 1, \dots m}$$

On a :

$$\operatorname{Res}_{E_j} h_D \circ f = \operatorname{Res}_{E_j} \overline{f(1/\bar{\xi})}$$

$$\operatorname{Res}_{E_j} \overline{f(1/\bar{\xi})} = \bar{C}_j.$$

$$\operatorname{Res}_{E_j} h_D \circ f(\xi) = \frac{A_j}{f'(E_j)}$$

En effet,

$$\frac{A_j}{f(\xi) - B_j} = \frac{A_j}{\xi - E_j} \cdot \frac{\xi - E_j}{f(\xi) - B_j}$$

$$\frac{\xi - E_j}{f(\xi) - B_j} \to \frac{1}{f'(E_j)}$$

Donc $\operatorname{Res}_{E_j} h_D \circ f = A_j / f'(E_j)$.

$$(**) \quad \boxed{A_j = \bar{C}_j \cdot f'(E_j) \qquad j = 1, \dots m}$$

Les équations (*) et (**) permettent de déterminer f lorsqu'on connaît h_D, ou de déterminer h_D lorsqu'on connaît f.

<u>Ex.</u> $D = B(a, R)$ $\quad |a| < R$.

$0 \in D$, $n = 1$, $z_1 = 0$, $q_1 = \text{cste}$.

$f_0(\xi) = R\xi + a$

$f_0(0) \neq 0$. $\quad f_0^{-1}(0) = -\frac{a}{R}$.

$$\begin{tikzcd} B(0,1) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "f = f_0 \circ \alpha"'] & B(0,1) \arrow[r, "f_0"] & B(a,R) \end{tikzcd}$$

$\alpha(0) = -\frac{a}{R}$.

Prendre $\alpha(\xi) = -\dfrac{\xi + \frac{a}{R}}{1 + \frac{\bar{a}}{R}\xi}$

$\alpha \in \text{Aut } B(0,1)$

et $\alpha(0) = -\frac{a}{R}$.

On trouve

$$f(\xi) = \frac{C\xi}{1-E\xi}$$

où $C = \frac{|a|^2 - R^2}{R}$, $E = \frac{-\bar{a}}{R}$.

On a

$$h_D(w) = \frac{A}{w-B}$$

où $B = f(\bar{E})$ et $A = \bar{C} \cdot f'(\bar{E})$

On trouve

$$B = a \text{ et } A = R^2.$$

Donc

$$h_D(w) = \frac{R^2}{w-a}$$

Développer $h_D(w)$ à ∞ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{M_k(D)}{w^{k+1}} \overset{\text{Prop}}{=} h_D(w) = \frac{R^2}{w-a} =$$

$$= \frac{1}{w} \frac{R^2}{1-\frac{a}{w}} = \frac{R^2}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{w}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^2 a^k}{w^{k+1}}$$

D'où

$$M_k(D) = \pi R^2 a^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

On a bien

$$M_0(D) = \pi R^2$$
$$M_1(D) = \pi R^2 a \quad \text{etc.}$$

On veut déterminer $D(t)$, par sa fonction uniformisante f_t. Or

$$h_{D(t)}(w) = h_{D(0)}(w) + \frac{q_1 t}{\pi w} \quad \text{(Richardson)}$$
$$= \frac{R^2}{w-a} + \frac{q_1 t}{\pi w}$$
$$= \frac{A_1}{w-B_1} + \frac{A_2}{w-B_2}$$

avec $A_1 = R^2$, $A_2 = \frac{q_1 t}{\pi}$

$B_1 = a \quad B_2 = 0$.

On sait que

$$f_t(\xi) = \frac{c_1 \xi}{1 - E_1 \xi} + \frac{c_2 \xi}{1 - E_2 \xi}$$

Résoudre (*) et (**)

en c_1, c_2, E_1, E_2 : (On peut supposer $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $E_j, c_j \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} E_2 = 0 \\ \dfrac{c_1 E_1}{1 - E_1^2} + c_2 E_1 = a \\ \dfrac{c_1^2}{(1-E_1^2)^2} + c_1 c_2 = R^2 \\ (c_1 + c_2)\, c_2 = \dfrac{q_1 t}{\pi} \end{cases}$$

En calculant, on trouve :

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{E_1} - \frac{E_1}{a}\left(R^2 - \frac{q_1 t}{\pi}\right)\right)$$

$$c_1 = \frac{1-E_1^2}{2}\left(\frac{a}{E_1} + \frac{E_1}{a}\left(R^2 - \frac{q_1 t}{\pi}\right)\right)$$

et

$$\left(R^2 - \frac{q_1 t}{\pi}\right)^2 E_1^6 - \left(2a^2R^2 + 2a^2\frac{q_1 t}{\pi} + a^4\right) E_1^2 + 2a^4 = 0.$$

Cette dernière équation a 4 racines réelles, 2 négatives et 2 positives. E_1 est la plus grande racine négative

$E_1 = E_1(t)$.

En effet, pour $t=0$:

$$E_1(0) = -\frac{a}{R}.$$

$\frac{a^2}{R^2}$ est racine

$$R^4x^3 - (2a^2R^2+a^4)x^2 + 2a^4 = 0.$$

en faisant $t=0$ et $E_1^2 = x$.
Toutes les racines de cette équation cubique sont réelles et $\frac{a^2}{R^2}$ est la plus petites des racines positives.
(il y a 2 racines positives et 1 racines négative)
On en déduit que $E_2(0)$ est le plus grand des racines négatives de l'équa sextiques ci-dessus par $t=0$.
Du coup $E_2(t)$ est la plus grande des racines négatives de l'équa sextique.

On a déterminé $f_t : B(0,1) \to$
$\to D(t)$ explicitement

$$f_t(\xi) = \frac{c_1 \xi}{1 - E_1 \xi} + c_2 \xi$$

où c_1, c_2, E_1 ont les valeurs ci-dessus.

$$f_t(\xi) = \frac{-c_2 E_1 \xi^2 + (c_1 + c_2)\xi}{1 - E_1 \xi}$$

$\deg(f_t) = 2$
$\deg(D(t)) = 2.$
$\deg(\partial D(t)) = 4.$

On peut déterminer $\partial D(t)$:

$$\partial D(t) = f_t(S^1) =$$

$$= Z\Big((x^2+y^2)^2 + 2E_1 a (x^2+y^2)x + K_t(x^2+y^2) + L_t x + M_t \Big)$$

où K_t, L_t, M_t peuvent être déterminés explicitement.