Institut Mathématique, Université de Rennes 1
Maîtrise de Mathématiques

ALGEBRE COMMUTATIVE

Examen Terminal, 2ème session, le 9 septembre 1998, 8h–11h

Aucun document n'est autorisé. Barème au verso.

1. Soit $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ le sous-anneau de $\mathbb{R}$ obtenu de $\mathbb{Z}$ en adjoignant $\sqrt[3]{2}$.

a. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}[X]/(X^3-2)$. (On pourra admettre que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers de degré < 3.)

b. Déterminer le nombre d'inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]/(5)$.

2. Soit I l'idéal de $\mathbb{Q}[X,Y]$ engendré par

$$\{X^2+Y^2-5X+2Y+1, X^2+Y^2+3X-2Y-3\}.$$

Déterminer le nombre d'idéaux maximaux de $\mathbb{Q}[X,Y]$ contenant I.

3. Soit A un anneau. Soit M un A-module et soit N un sous-A-module de M. On dira que N est *primitif* lorsque, quels que soient $r \in A$ régulier et $m \in M$, $rm \in N$ implique que $m \in N$.

a. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(a,b) \neq (0,0)$. Montrer que le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ engendré par (a,b) est primitif si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$.

b. Soit N un sous-A-module du A-module M. Montrer que N est primitif si et seulement si M/N est sans torsion.

Soit M un A-module et soit N un sous-A-module de M. Soit N_{prim} le sous-ensemble de M défini par

$$N_{\mathrm{prim}} = \{m \in M \mid \exists r \in A \text{ régulier tel que } rm \in N\}.$$

c. Montrer que N_{prim} est un sous-A-module primitif de M contenant N.

d. Montrer que N_{prim} est le plus petit sous-A-module primitif de M contenant N.

e. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(a,b) \neq (0,0)$. Soit $d = \mathrm{pgcd}(a,b)$. Soit N le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ engendré par (a,b). Montrer que N_{prim} est engendré par $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$.

f. Soit N un sous-A-module du A-module M. Montrer que $(N_{\mathrm{prim}})/N$ est isomorphe à $(M/N)_{\mathrm{tors}}$.

g. Soient M et N des A-modules. Soit $f\colon M \to N$ un morphisme de A-modules. Montrer que $\ker(f)$ est primitif lorsque N est sans torsion.

T.S.V.P.

4. Soit A un anneau et soient M et N des A-modules. Soient $m, m' \in M$ et $n, n' \in N$.

a. Montrer que $m \otimes n = m' \otimes n'$ dans $M \otimes_A N$ si et seulement si pour tout A-module P et pour toute application A-bilinéaire $\beta\colon M \times N \to P$ on a que $\beta(m,n) = \beta(m',n')$.

Dans la suite on étudie l'assertion suivante :

$$m \otimes n = 0 \text{ dans } M \otimes_A N \text{ si et seulement si } m = 0 \text{ ou } n = 0 \qquad \text{(C)}$$

b. Supposons que A est intègre et que quel que soit $x \in M \backslash \{0\}$ (respectivement $y \in N \backslash \{0\}$) il existe un morphisme de A-modules $\varphi\colon M \to A$ (respectivement $\psi\colon N \to A$) tel que $\varphi(x) \neq 0$ (respectivement $\psi(y) \neq 0$). Montrer l'assertion (C).

c. En déduire que l'assertion (C) est vraie lorsque A est intègre et M et N sont libres.

d. Donner un contre-exemple à l'assertion (C) lorsque A n'est pas intègre et M et N sont libres.

Barème indicatif sur 20 points :

1 : 4 pts	**2 : 4 pts**	**3 : 7 pts**	**4 : 5 pts**

T.S.V.P.