Institut Mathématique, Université de Rennes 1
Maîtrise de Mathématiques

ALGEBRE COMMUTATIVE

Examen Terminal, le 21 janvier 1998, 14h–17h

Aucun document n'est autorisé. Barème au verso.

1. Déterminer le nombre d'inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}[i]_{i+2})/(5)$.

2. a. Soit A un anneau noetherien et $f\colon A \to A$ un endomorphisme d'anneaux surjectif. Montrer que f est injectif. (On pourra considérer les idéaux $\ker(f^i)$ de A, où $f^i = f \circ f^{i-1}$ pour $i > 1$ et $f^1 = f$.)

b. Soit A un anneau noetherien non nul. Montrer que si l'anneau $A[X_1, \ldots, X_m]$ est isomorphe à l'anneau $A[X_1, \ldots, X_n]$, alors $m = n$. (On pourra supposer $m \leq n$ et considérer le morphisme d'anneaux $g\colon A[X_1, \ldots, X_n] \to A[X_1, \ldots, X_m]$ satisfaisant $g_{|A} = \mathrm{id}_A$, $g(X_i) = X_i$ pour $i = 1, \ldots, m$, et $g(X_i) = 0$ pour $i = m+1, \ldots, n$.)

3. Soit A un anneau et

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A-modules. Vrai ou faux (justifier les réponses) :

a. M est de type fini lorsque N et P sont de type fini ;
b. N est de type fini lorsque M et P sont de type fini ;
c. P est de type fini lorsque M et N sont de type fini.

4. Soit $f\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux. Soient M et N des B-modules. On désignera les structures induites de A-modules sur M et N encore par M et N.

a. Soit $b \in B$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme Φ_b du A-module $M \otimes_A N$ satisfaisant $\Phi_b(m \otimes n) = (bm) \otimes n$ quels que soient $m \in M$, $n \in N$.

b. Montrer qu'il existe une structure de B-module sur le A-module $M \otimes_A N$ satisfaisant $b \cdot (m \otimes n) = (bm) \otimes n$ quels que soient $b \in B$, $m \in M$ et $n \in N$.

Soit $R \subseteq M \otimes_A N$ le sous-A-module de $M \otimes_A N$ engendré par le sous-ensemble

$$S = \{(bm) \otimes n - m \otimes (bn) \,|\, b \in B, m \in M, n \in N\}$$

de $M \otimes_A N$.

T.S.V.P.

c. Montrer que R est un sous-B-module de $M \otimes_A N$.
d. Montrer que le B-module $(M \otimes_A N)/R$ est isomorphe au produit tensoriel $M \otimes_B N$ de M et N en tant que B-modules.

Barème indicatif sur 40 points :

1 : 8 pts	**2 : 10 pts**		**3 : 10 pts**	**4 : 12 pts**			
8	a: 5	b: 5	10	a: 2	b: 3	c: 3	d: 4

T.S.V.P.