Institut Mathématique, Université de Rennes 1
Maîtrise de Mathématiques

ALGEBRE COMMUTATIVE

Examen Terminal, le 21 janvier 1997, 14h–17h

Aucun document n'est autorisé. Barème au verso.

1. Vrai ou faux (justifier chaque réponse en 3 lignes maximum, toute ligne supplémentaire sera ignorée) :

a. Un élément d'un anneau A n'appartenant à aucun idéal premier de A est inversible.

b. Un morphisme d'anneaux $f\colon A \to B$ induit un morphisme d'anneaux f' de $\mathrm{Frac}(A)$ dans $\mathrm{Frac}(B)$ tel que le diagramme suivant, dans lequel les flèches verticales sont les morphismes de localisation, commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \mathrm{Frac}(A) \arrow[r, "f'"] & \mathrm{Frac}(B) \end{tikzcd}$$

c. Le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-module $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est de torsion.

d. L'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ est un anneau local.

2. Soit a_i, $i \in \mathbb{N}$, les nombres réels définis par $a_0 = 2$ et $a_{i+1} = \sqrt{a_i}$. En fait, $a_i = \sqrt[2^i]{2}$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$. Soit A_i le sous-anneau $\mathbb{Z}[a_i]$ de $\mathbb{R}$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$. Soit $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Montrer que

a. $A_i \subseteq A_{i+1}$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$;

b. A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

Par la suite on montrera que l'anneau A n'est pas noetherien. Soit $I_i \subseteq A_i$ l'idéal de A_i engendré par a_i. Soit $I = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$. Montrer que

c. $I_i \subseteq I_{i+1}$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$;

d. I est un idéal de A ;

e. A_i est de type fini en tant que $\mathbb{Z}$-module quel que soit $i \in \mathbb{N}$;

f. 2 n'est pas inversible dans A_i quel que soit $i \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser et admettre que $\mathbb{Z}_2$ n'est pas de type fini comme $\mathbb{Z}$-module) ;

g. $I_i^{2^i} = 2A_i$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$;

h. $I_i \neq A_i$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$;

i. $I \neq A$;

j. $I \cdot I = I$;

k. I n'est pas de type fini.

T.S.V.P.

3. Soient M, N et P des A-modules. Soient $f\colon P \to M$ et $g\colon P \to N$ des morphismes de A-modules. Soit $h\colon P \to M \oplus N$ le morphisme défini par $h(p) = f(p) \oplus -g(p)$. Soit $M \oplus_P N$ le quotient de $M \oplus N$ par $\mathrm{im}(h)$. On appelle $M \oplus_P N$ la *somme amalgamée* de M et N sur P. On note l'image de l'élément $m \oplus n$ dans $M \oplus_P N$ par $m \oplus_P n$. Soient de plus $i\colon M \to M \oplus_P N$ et $j\colon N \to M \oplus_P N$ les morphismes définis par $i(m) = m \oplus_P 0$ et $j(n) = 0 \oplus_P n$.

a. Montrer que $i \circ f = j \circ g$.

b. Montrer que $M \oplus_P N$ muni de ses morphismes i et j satisfait la propriété universelle suivante. Pour tout A-module Q et pour tous les morphismes $k\colon M \to Q$ et $l\colon N \to Q$ tels que $k \circ f = l \circ g$, il existe un et un seul morphisme $u\colon M \oplus_P N \to Q$ tel que $u \circ i = k$ et $u \circ j = l$, i.e., tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "k"] & & \\
P \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & M \oplus_P N \arrow[r, "u"] & Q \\
& N \arrow[ur, "j"'] \arrow[urr, bend right, "l"'] & &
\end{tikzcd}$$

c. Supposons que M, N et P sont des sous-A-modules d'un A-module K, que $P = M \cap N$, et que $f\colon P \to M$ et $g\colon P \to N$ sont les inclusions. Montrer que $M \oplus_P N \cong M + N$.

d. Soit $P' = P/(\ker(f) \cap \ker(g))$. Soient $f'\colon P' \to M$ et $g'\colon P' \to N$ les morphismes induits. Montrer que $M \oplus_P N \cong M \oplus_{P'} N$. (De ce fait, en ce qui concerne les sommes amalgamées, on peut toujours supposer $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.)

Dans la suite soit A un corps et soient M, N et P des A-vectoriels. Supposons que M et N sont de dimension finie. Soient $f\colon P \to M$ et $g\colon P \to N$ des morphismes A-linéaires tels que $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

e. Montrer que $M \oplus_P N$ et P sont de dimension finie.

f. Exprimer la dimension de $M \oplus_P N$ en fonction des dimensions de M, N et P.

Barème indicatif sur 40 points :

1 : 8 pts				**2 : 20 pts**											**3 : 12 pts**					
a	b	c	d	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	a	b	c	d	e	f
2	2	2	2	1	2	1	2	3	3	0	2	2	2	2	2	3	2	2	2	1

T.S.V.P.