

Institut Mathématique, Université de Rennes 1
Maîtrise de Mathématiques

ALGÈBRE COMMUTATIVE

Examen Terminal, le 21 janvier 1997, 14h–17h

Aucun document n'est autorisé. Barème au verso.

1. Vrai ou faux (justifier chaque réponse en 3 lignes maximum, toute ligne supplémentaire sera ignorée) :

- Un élément d'un anneau A n'appartenant à aucun idéal premier de A est inversible.
- Un morphisme d'anneaux $f: A \rightarrow B$ induit un morphisme d'anneaux f' de $\text{Frac}(A)$ dans $\text{Frac}(B)$ tel que le diagramme suivant, dans lequel les flèches verticales sont les morphismes de localisation, commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Frac}(A) & \xrightarrow{f'} & \text{Frac}(B) \end{array}$$

- Le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -module $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est de torsion.
- L'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ est un anneau local.

2. Soit $a_i, i \in \mathbb{N}$, les nombres réels définis par $a_0 = 2$ et $a_{i+1} = \sqrt{a_i}$. En fait, $a_i = \sqrt[2^i]{2}$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$. Soit A_i le sous-anneau $\mathbb{Z}[a_i]$ de \mathbb{R} quel que soit $i \in \mathbb{N}$. Soit $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Montrer que

- $A_i \subseteq A_{i+1}$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$;
- A est un sous-anneau de \mathbb{R} .

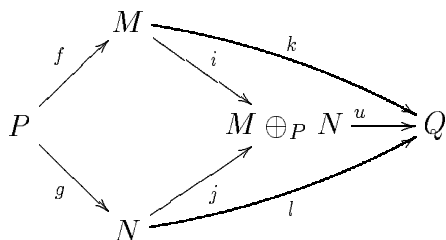
Par la suite on montrera que l'anneau A n'est pas noetherien. Soit $I_i \subseteq A_i$ l'idéal de A_i engendré par a_i . Soit $I = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$. Montrer que

- $I_i \subseteq I_{i+1}$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$;
- I est un idéal de A ;
- A_i est de type fini en tant que \mathbb{Z} -module quel que soit $i \in \mathbb{N}$;
- 2 n'est pas inversible dans A_i quel que soit $i \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser et admettre que \mathbb{Z}_2 n'est pas de type fini comme \mathbb{Z} -module);
- $I_i^{2^i} = 2A_i$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$;
- $I_i \neq A_i$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$;
- $I \neq A$;
- $I \cdot I = I$;
- I n'est pas de type fini.

T.S.V.P.

3. Soient M, N et P des A -modules. Soient $f: P \rightarrow M$ et $g: P \rightarrow N$ des morphismes de A -modules. Soit $h: P \rightarrow M \oplus N$ le morphisme défini par $h(p) = f(p) \oplus -g(p)$. Soit $M \oplus_P N$ le quotient de $M \oplus N$ par $\text{im}(h)$. On appelle $M \oplus_P N$ la *somme amalgamée* de M et N sur P . On note l'image de l'élément $m \oplus n$ dans $M \oplus_P N$ par $m \oplus_P n$. Soient de plus $i: M \rightarrow M \oplus_P N$ et $j: N \rightarrow M \oplus_P N$ les morphismes définis par $i(m) = m \oplus_P 0$ et $j(n) = 0 \oplus_P n$.

- Montrer que $i \circ f = j \circ g$.
- Montrer que $M \oplus_P N$ muni de ses morphismes i et j satisfait la propriété universelle suivante. Pour tout A -module Q et pour tous les morphismes $k: M \rightarrow Q$ et $l: N \rightarrow Q$ tels que $k \circ f = l \circ g$, il existe un et un seul morphisme $u: M \oplus_P N \rightarrow Q$ tel que $u \circ i = k$ et $u \circ j = l$, i.e., tel que le diagramme suivant commute :



- Supposons que M, N et P sont des sous- A -modules d'un A -module K , que $P = M \cap N$, et que $f: P \rightarrow M$ et $g: P \rightarrow N$ sont les inclusions. Montrer que $M \oplus_P N \cong M + N$.
- Soit $P' = P/(\ker(f) \cap \ker(g))$. Soient $f': P' \rightarrow M$ et $g': P' \rightarrow N$ les morphismes induits. Montrer que $M \oplus_P N \cong M \oplus_{P'} N$. (De ce fait, en ce qui concerne les sommes amalgamées, on peut toujours supposer $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.)

Dans la suite soit A un corps et soient M, N et P des A -vectoriels. Supposons que M et N sont de dimension finie. Soient $f: P \rightarrow M$ et $g: P \rightarrow N$ des morphismes A -linéaires tels que $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

- Montrer que $M \oplus_P N$ et P sont de dimension finie.
- Exprimer la dimension de $M \oplus_P N$ en fonction des dimensions de M, N et P .

Barème indicatif sur 40 points :

1 : 8 pts				2 : 20 pts										3 : 12 pts							
a	b	c	d	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	a	b	c	d	e	f	
2	2	2	2	1	2	1	2	3	3	0	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	1

T.S.V.P.