Institut Mathématique, Université de Rennes 1
Maîtrise de Mathématiques

ALGEBRE COMMUTATIVE

Contrôle, le 23 novembre 1996, 8h–11h

La durée de l'épreuve est de 3 heures. Aucun document n'est autorisé. Barème indicatif : **1**: 4 points, **2** : 8 points, **3** : 5 points, **4**: 3 points.

1. Vrai ou faux (justifier chaque réponse en 3 lignes maximum) :

a. $p \times q \subseteq A \times B$ est un idéal premier lorsque $p \subseteq A$ et $q \subseteq B$ sont des idéaux premiers.

b. Un anneau A contient un sous-anneau isomorphe à l'anneau des décimaux lorsque $10 \in A^\star$.

c. L'anneau produit $A \times B$ est réduit lorsque les anneaux A et B le sont.

d. Le polynôme $3X^2 - 15X + 6$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

2. Soit $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la réduction modulo 2. Soit

$$A = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, \pi(m) = \pi(n)\}.$$

Soient $pr_1, pr_2\colon A \to \mathbb{Z}$ les projections définies par

$$pr_1(m,n) = m \text{ et } pr_2(m,n) = n.$$

a. Montrer que A est un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b. Montrer que pr_1 et pr_2 sont des morphismes d'anneaux de A dans $\mathbb{Z}$.

c. Montrer que $\ker(pr_1)$ et $\ker(pr_2)$ sont des idéaux premiers de A.

d. Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. Rappelons que $A(p,p)$ est l'idéal engendré par $(p,p) \in A$. Montrer que les idéaux $\ker(pr_1) + A(p,p)$ et $\ker(pr_2) + A(p,p)$ sont des idéaux maximaux.

e. Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. Montrer que $\ker(pr_1) + A(p,p) = \ker(pr_2) + A(p,p)$ si et seulement si $p = 2$.

f. Soit $P \subseteq A$ un idéal premier. Montrer que P contient $\ker(pr_1)$ ou $\ker(pr_2)$.

g. Montrer que les idéaux premiers minimaux de A sont exactement $\ker(pr_1)$ et $\ker(pr_2)$.

h. Soit $P \subseteq A$ un idéal maximal. Montrer qu'il existe un unique nombre premier $p \in \mathbb{N}$ tel que $P = \ker(pr_1) + A(p,p)$ ou $P = \ker(pr_2) + A(p,p)$.

3. Soit K un corps et a un élément de K. Soit $f\colon K[X] \to K$ le morphisme d'évaluation en a, i.e., $f(P) = P(a)$ pour tout $P \in K[X]$.

a. Soit $K[X]_{(X-a)}$ la localisation de $K[X]$ en l'idéal maximal $(X - a)$. Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux g de $K[X]_{(X-a)}$ dans K tel que $g(\frac{P}{1}) = f(P)$ quel que soit $P \in K[X]$.

T.S.V.P.

b. Montrer que l'on a $g(\frac{P}{Q}) = f(P)f(Q)^{-1}$ pour tout $\frac{P}{Q} \in K[X]_{(X-a)}$.

Considérer dans la suite $K[X]$ et $K[X]_{(X-a)}$ comme sous-anneaux du corps de fractions $K(X)$ de $K[X]$. On a alors $g(P) = f(P)$ quel que soit $P \in K[X]$, d'après le a.

c. Soit A un sous-anneau de $K(X)$ contenant $K[X]$. Soit $h\colon A \to K$ un morphisme d'anneaux tel que $h(P) = f(P)$ quel que soit $P \in K[X]$. Montrer que A est un sous-anneau de $K[X]_{(X-a)}$.

4. Soit n un entier positif et $\prod_{i=1}^{g} p_i^{e_i}$ sa décomposition en facteurs premiers, i.e., $p_i \in \mathbb{N}$ est un nombre premier, e_i est un entier positif, $i = 1, \ldots, g$, et $p_i \neq p_j$ lorsque $i \neq j$. On pose $m = \prod_{i=1}^{g} p_i$.

Soit A un anneau de caractéristique n. Montrer que l'anneau réduit A_{red} associé à A est de caractéristique m.

T.S.V.P.