Institut Mathématique, Université de Rennes 1
Maîtrise de Mathématiques

ALGEBRE COMMUTATIVE

Examen Terminal, le 21 janvier 1998

CORRIGE et BAREME

1. On a les isomorphismes

$$\begin{aligned}
(\mathbb{Z}[i]_{i+2})/(5) &\cong \left((\mathbb{Z}[X]/(X^2+1))_{X+2}\right)/(5) \quad \textbf{(1 pt)} \\
&\cong \left((\mathbb{Z}[X]/(X^2+1))/(5)\right)_{X+2} \quad \textbf{(1 pt)} \\
&\cong \left(\mathbb{Z}[X]/(X^2+1,5)\right)_{X+2} \quad \textbf{(1 pt)} \\
&\cong \left((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X^2+1)\right)_{X+2} \quad \textbf{(1 pt)}.
\end{aligned}$$

Comme $X^2+1 = (X-2)(X+2)$ dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$, et comme $X-2$ et $X+2$ sont premiers entre eux, le morphisme d'anneaux

$$f\colon (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X^2+1) \longrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

qui envoie X sur $(2,-2)$ est un isomorphisme **(1 pt)**. Comme $f(X+2) = (4,0)$, on a l'isomorphisme

$$\left((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X^2+1)\right)_{X+2} \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})_{(4,0)} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Mais $(4,0)^2 = (1,0)$, donc $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ localisé par $(4,0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ localisé par $(1,0)$. Ce dernier est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ **(1 pt)**. On en déduit l'isomorphisme

$$(\mathbb{Z}[i]_{i+2})/(5) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

Le nombre d'inversibles est donc égal à 4 **(1 pt)**.

2. a. Les idéaux $\ker(f^i)$ constituent une chaîne croissante d'idéaux de A. En effet, si $a \in \ker(f^i)$, on a que $f^{i+1}(a) = f \circ f^i(a) = f(0) = 0$, i.e., a appartient à $\ker(f^{i+1})$. D'où l'inclusion $\ker(f^i) \subseteq \ker(f^{i+1})$, quel que soit $i > 0$ **(1 pt)**. Comme A est noetherien, cette chaîne est stationnaire **(1 pt)**.
Supposons que f ne soit pas injectif. On montre qu'alors $\ker(f^i) \neq \ker(f^{2i})$ quel que soit $i > 0$, ce qui contredira le fait que la chaîne est stationnaire. Or, l'endomorphisme f n'étant pas injectif, f^i n'est pas injectif. Il existe donc $a \in \ker(f^i)$ avec $a \neq 0$. L'endomorphisme f étant surjectif, f^i est surjectif. Il existe donc $b \in A$ tel que $f^i(b) = a$. On a alors $f^{2i}(b) = f^i(f^i(b)) = f^i(a) = 0$ et $f^i(b) = a \neq 0$, i.e., $b \in \ker(f^{2i}) \setminus \ker(f^i)$, ce qui montre que $\ker(f^i) \neq \ker(f^{2i})$ **(3 pts)**.

b. On peut supposer que $m \leq n$ et on montre que $n \leq m$. Soit

$$g\colon A[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow A[X_1,\dots,X_m]$$

le morphisme d'anneaux satisfaisant $g_{|A} = \mathrm{id}_A$, $g(X_i) = X_i$ pour $i = 1,\dots,m$, et $g(X_i) = 0$ pour $i = m+1,\dots,n$. La restriction de g au sous-anneau $A[X_1,\dots,X_m]$ de $A[X_1,\dots,X_n]$ est égale à l'identité sur $A[X_1,\dots,X_m]$. Cette restriction est donc surjective. En particulier, g est surjectif **(1 pt)**.
Soit

$$f\colon A[X_1,\dots,X_m] \longrightarrow A[X_1,\dots,X_n]$$

un isomorphisme. Comme f et g sont des morphismes surjectifs, le composé

$$g \circ f\colon A[X_1,\dots,X_m] \longrightarrow A[X_1,\dots,X_m]$$

est un endomorphisme surjectif **(1 pt)**. L'anneau A étant noetherien, $A[X_1,\dots,X_m]$ est noetherien **(1 pt)**. D'après le a, $g \circ f$ est alors injectif. Comme f est surjectif, il suit que g est injectif **(1 pt)**. Mais $g(X_i) = 0$ pour $i \in \{m+1,\dots,n\}$ et $X_i \neq 0$, car A est non nul. Il vient que $n \leq m$ **(1 pt)**.

3. a. Faux. Soit A l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, \dots]$ et $I \subseteq A$ l'idéal $(X_1, X_2, X_3, \dots)$. Soit $i\colon I \to A$ l'inclusion et $\pi\colon A \to A/I$ le morphisme de passage au quotient. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0.$$

Evidemment, A est de type fini en tant que A-module **(1 pt)**. Comme π est surjectif, A/I est également de type fini en tant que A-module **(1 pt)**. Cependant, on sait que I n'est pas de type fini **(1 pt)**.

b. Vrai. Soient $\{m_1,\dots,m_r\} \subseteq M$ et $\{p_1,\dots,p_t\} \subseteq P$ des systèmes générateurs. Comme g est surjectif, il existe $n_i \in N$ tel que $g(n_i) = p_i$ pour $i = 1,\dots,t$. Soit $n_{t+i} = f(m_i)$ pour $i = 1,\dots,r$. Soit $s = t+r$. On montre que le système $\{n_1,\dots,n_s\}$ engendre N. **(2 pts)**
Soit $n \in N$. Comme $\{p_1,\dots,p_t\}$ engendre P, il existe $a_1,\dots,a_t \in A$ tels que

$$g(n) = \sum_{i=1}^{t} a_i p_i.$$

L'élément $n' = n - \sum_{i=1}^{t} a_i n_i$ de N appartient à $\ker(g)$. En effet,

$$g(n') = g(n - \sum_{i=1}^{t} a_i n_i) = g(n) - \sum_{i=1}^{t} a_i g(n_i) =$$
$$= g(n) - \sum_{i=1}^{t} a_i p_i = 0 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Comme la suite est exacte, n' appartient alors à $\mathrm{im}(f)$, i.e., il existe $m \in M$ tel que $f(m) = n'$ **(1 pt)**. Comme $\{m_1, \ldots, m_r\}$ engendre M, il existe $a_{t+1}, \ldots, a_{t+r} \in A$ tels que

$$m = \sum_{i=1}^{r} a_{t+i} m_i.$$

On a alors que

$$n - \sum_{i=1}^{t} a_i n_i = n' = f(m) = f(\sum_{i=1}^{r} a_{t+i} m_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} a_{t+i} f(m_i) = \sum_{i=1}^{r} a_{t+i} n_{t+i}.$$

D'où,

$$n = \sum_{i=1}^{s} a_i n_i \quad \textbf{(1 pt)}.$$

c. Vrai. Comme N est de type fini et g est surjectif, P est de type fini. **(2 pts)**

4. a. Soit $\Psi_b \colon M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$ l'application définie par $\Psi_b(m, n) = (bm) \otimes n$. On vérifie facilement que Ψ_b est A-bilinéaire **(1 pt)**. D'après la propriété universelle du produit tensoriel, il existe alors un unique morphisme de A-modules $\Phi_b \colon M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$ satisfaisant $\Phi_b(m \otimes n) = (bm) \otimes n$, quels que soient $m \in M$, $n \in N$ **(1 pt)**.

b. Il suffit de montrer que l'application $\Phi \colon B \longrightarrow \mathrm{End}(M \otimes_A N)$ qui associe à b l'endomorphisme Φ_b, est un morphisme d'anneaux.
Comme $\Phi_1(m \otimes n) = m \otimes n$, quels que soient $m \in M$ et $n \in N$, on a $\Phi_1 = \mathrm{id}$, sachant que les tenseurs simples engendrent $M \otimes_A N$ **(1 pt)**.

Soient $b, b' \in B$. Montrons que $\Phi_{b+b'} = \Phi_b + \Phi_{b'}$. Soit $m \in M$ et $n \in N$. Alors,

$$\begin{aligned}(\Phi_b + \Phi_{b'})(m \otimes n) &= \Phi_b(m \otimes n) + \Phi_{b'}(m \otimes n) = \\ &= (bm) \otimes n + (b'm) \otimes n = \\ &= (bm + b'm) \otimes n = \\ &= ((b + b')m) \otimes n = \\ &= \Phi_{b+b'}(m \otimes n).\end{aligned}$$

Comme les tenseurs simples engendrent $M \otimes_A N$, on a que $\Phi_{b+b'} = \Phi_b + \Phi_{b'}$ **(1 pt)**.
Montrons ensuite que $\Phi_{bb'} = \Phi_b \circ \Phi_{b'}$. Soit $m \in M$ et $n \in N$. Alors,

$$\begin{aligned}\Phi_b(\Phi_{b'}(m \otimes n)) &= \Phi_b((b'm) \otimes n) = \\ &= (bb'm) \otimes n = \\ &= \Phi_{bb'}(m \otimes n).\end{aligned}$$

Comme les tenseurs simples engendrent $M \otimes_A N$, on a que $\Phi_{bb'} = \Phi_b \circ \Phi_{b'}$ **(1 pt)**.

c. Comme R est déjà un sous$A$-module de $M \otimes_A N$, il suffit de montrer que pour tout $b \in B$ et $x \in R$, on a que $bx \in R$ **(1 pt)**. Comme $bx = \Phi_b(x)$, il faut donc montrer que $\Phi_b(R) \subseteq R$. Mais R est engendré comme A-module par S et Φ_b est A-linéaire, donc il suffit de montrer que $\Phi_b(S) \subseteq R$ **(1 pt)**. Or,

$$\begin{aligned}\Phi_b((b'm) \otimes n - m \otimes (b'n)) &= \Phi_b((b'm) \otimes n) - \Phi_b(m \otimes (b'n)) = \\ &= (bb'm) \otimes n - (bm) \otimes (b'n) = \\ &= (bb'm) \otimes n - m \otimes (bb'n) + \\ &\quad - ((bm) \otimes (b'n) - m \otimes (bb'n)) \in R\end{aligned}$$

lorsque $b' \in B$, $m \in M$ et $n \in N$ **(1 pt)**.

d. Soit $\pi \colon M \otimes_A N \to (M \otimes_A N)/R$ le morphisme de passage au quotient. Soit $\beta \colon M \times N \to (M \otimes_A N)/R$ l'application définie par $\beta(m, n) = \pi(m \otimes n)$. L'application β est B-bilinéaire. En effet, β est clairement additif en m et n. De plus,

$$\begin{aligned}\beta(bm, n) &= \pi((bm) \otimes n) = \\ &= \pi(b \cdot (m \otimes n)) = b \cdot \pi(m \otimes n) = \\ &= b \cdot \beta(m, n) \quad \textbf{(0,5 pt)}\end{aligned}$$

d'après la définition de la structure de B-module sur $M \otimes_A N$. Dans le quotient $(M \otimes_A N)/R$ on a $(bm) \otimes n = m \otimes (bn)$ quels que soient $b \in B$, $m \in M$ et $n \in N$. D'où $\beta(m, bn) = \pi(m \otimes (bn)) = \pi((bm) \otimes n) = \beta(bm, n) = b \cdot \beta(m, n)$ **(0,5 pt)**. Cela montre que β est B-bilinéaire.
Ensuite, on montre que β est universelle. Soit $\alpha\colon M \times N \to P$ une application B-bilinéaire dans un B-module P. L'application α est en particulier A-bilinéaire pour les structures de A-modules induites. Il existe alors un morphisme de A-modules $f\colon M \otimes_A N \to P$ tel que $f(m \otimes n) = \alpha(m, n)$ quels que soient $m \in M$ et $n \in N$ **(0,5 pt)**. D'après la définition de la structure de B-module sur $M \otimes_A N$ et la B-bilinéarité de α, le morphisme f est en fait un morphisme de B-modules **(0,5 pt)**. Comme

$$\begin{aligned} f((bm) \otimes n - m \otimes (bn)) &= f((bm) \otimes n) - f(m \otimes (bn)) = \\ &= \alpha(bm, n) - \alpha(m, bn) = \\ &= b \cdot \alpha(m, n) - b \cdot \alpha(m, n) = 0, \end{aligned}$$

on a que $f(R) = \{0\}$ **(0,5 pt)**. D'après la propriété universelle du quotient, il existe un morphisme de B-modules $g\colon (M \otimes_A N)/R \to P$ tel que $g \circ \pi = f$. On a donc $g \circ \beta(m, n) = g \circ \pi(m \otimes n) = f(m \otimes n) = \alpha(m, n)$ quels que soient $m \in M$ et $n \in N$, c-à-d, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & (M \otimes_A N)/R \arrow[d, "g"] \\ & P \end{tikzcd}$$

commute **(0,5 pt)**.
Puis on montre que g est l'unique morphisme de B-modules satisfaisant $g \circ \beta = \alpha$. Soit g' un morphisme de B-modules tel que $g' \circ \beta = \alpha$. En particulier, on a que $g' \circ \pi(m \otimes n) = \alpha(m, n)$ quels que soient $m \in M$ et $n \in N$. Comme $g' \circ \pi$ est B-linéaire et donc en particulier A-linéaire, $g' \circ \pi = f$ d'après l'unicité de f. Le morphisme g étant l'unique morphisme satisfaisant $g \circ \pi = f$, on a que $g' = g$ **(0,5 pt)**.
On a montré que $(M \otimes_A N)/R$ satisfait la propriété universelle du produit tensoriel $M \otimes_B N$. On en déduit l'isomorphisme $(M \otimes_A N)/R \cong M \otimes_B N$ **(0,5 pt)**.