Institut Mathématique, Université de Rennes 1
Maîtrise de Mathématiques

ALGEBRE COMMUTATIVE

Examen Terminal, 2ème session, le 21 janvier 1997

CORRIGE

1. a. Faux. L'anneau $\mathbb{Z}$ est principal, mais $\mathbb{Z}[X]$ ne l'est pas (voir Exemple 2.3.4).

b. Faux. Prendre $A = \mathbb{Z}$ et $S = A$. Alors, $S^{-1}A$ est l'anneau nul. Donc le morphisme de localisation $\iota\colon A \to S^{-1}A$ n'est pas injectif dans ce cas.

c. Faux. Une telle structure équivaut à un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans l'anneau des endomorphismes $\mathrm{End}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ du groupe $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Ce dernier anneau est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Or, il n'y a pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

d. Vrai. Le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est isomorphe au quotient de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ par l'idéal engendré par 3.

2. a. Soit $p \subseteq A$ un idéal premier. Le quotient A/p est donc intègre. Comme A est fini, A/p est fini. Le quotient A/p est donc un anneau intègre fini. Un tel anneau est forcément un corps (voir Exercice 8). Par conséquent, p est maximal. Comme A est local, $p = m$.

b. L'ensemble des nilpotents d'un anneau est égal à l'intersection de tous ses idéaux premiers (Corollaire 1.7.11). Ici, d'après le a, l'anneau A n'a qu'un seul idéal premier, à savoir m. Par conséquent, tous les éléments de m sont nilpotents. Comme A est un anneau local, les éléments de A n'appartenant pas à m sont inversibles (Corollaire 1.6.8). D'où l'assertion.

3. a. Soit $\bar{P} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ la réduction modulo 2 du polynôme P. Alors, $A = \mathbb{Z}[X]/(2, P) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(\bar{P}) = B$ (voir Exercices 79 et 80). Comme $\bar{P} \neq 0$, l'anneau B est fini. D'où A est fini.

b. Soit $Q \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ le polynôme $X^2 + X + 1$. Comme $\bar{P} = Q^2$, le polynôme Q donne un élément q dans B, tel que $q^2 = 0$. Comme $Q \notin (\bar{P})$, $q \neq 0$ dans B. D'où l'anneau A n'est pas réduit.

c. Les idéaux maximaux du quotient $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(\bar{P})$ correspondent aux idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ contenant l'idéal $(\bar{P})$ (Exercice 106). Chacun de ces derniers idéaux maximaux est engendré par un facteur irréductible de $\bar{P}$. Comme Q est irréductible et $\bar{P} = Q^2$, l'idéal maximal (Q) est le seul idéal maximal contenant $(\bar{P})$. D'où l'anneau A est local.

d. Comme $\bar{P}$ est de degré 4, B est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-module libre de rang 4, i.e., le cardinal de B—donc aussi celui de A—est égal à 2^4. De même, le cardinal de A/m qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(Q)$ est égal à 2^2.

e. On a que $\mathrm{Card}(m)\cdot\mathrm{Card}(A/m) = \mathrm{Card}(A)$. D'après le d, le cardinal de m est égal à $2^4/2^2 = 2^2$.

f. Comme A est un anneau local, l'ensemble des inversibles de A est égal au complément $A\backslash m$. D'après le d et le e, ce dernier ensemble est de cardinal $2^4 - 2^2$.

g. D'après le 2, l'ensemble des nilpotents de A est égal à m. D'après le e, A a 2^2 nilpotents.

4. a. Rappelons que le produit fibré de N et Q sur P est le sous-A-module $N \times_P Q$ de $N \times Q$ défini par

$$N \times_P Q = \{(n,q) \in N \times Q \,|\, g(n) = h(q)\}.$$

Soit $\pi\colon N \times_P Q \to Q$ la projection, i.e., $\pi(n,q) = q$. Evidemment, π est un morphisme de A-modules. Soit encore ι le morphisme de A-modules de M dans le produit $M \times Q$ défini par $\iota(m) = (f(m), 0)$. Comme $g(f(m)) = 0 = h(0)$, $\iota(m)$ appartient, en fait, au produit fibré $N \times_P Q$. On peut donc considérer ι comme étant un morphisme de A-modules de M dans $N \times_P Q$.

Montrons maintenant que la suite courte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} N \times_P Q \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

est exacte.

Comme f est injectif, $\iota(m) = 0$ implique que $m = 0$. D'où l'injectivité de ι.

On a $\pi \circ \iota(m) = \pi(f(m), 0) = 0$ quel que soit $m \in M$, i.e., $\pi \circ \iota = 0$. Donc, $\mathrm{im}(\iota) \subseteq \ker(\pi)$.

Ensuite, soit $(n,q) \in N \times_P Q$ tel que $\pi(n,q) = 0$. Cela veut dire que $q = 0$. Comme (n,q) appartient à $N \times_P Q$, $g(n) = h(q) = h(0) = 0$. Donc $n \in \ker(g)$. Puisque $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$, il existe $m \in M$ tel que $f(m) = n$. Alors, $(n,q) = (f(m), 0) = \iota(m)$, i.e., $\ker(\pi) \subseteq \mathrm{im}(\iota)$.

Il nous reste à montrer que π est surjectif. Soit $q \in Q$. Comme g est surjectif, il existe $n \in N$ tel que $g(n) = h(q)$. Donc, l'élément (n,q) de $N \times Q$ appartient, en fait, au produit fibré $N \times_P Q$. L'image $\pi(n,q)$ de cet élément est par définition égale à q. D'où la surjectivité de π.

b. Rappelons que la somme amalgamée $Q \oplus_M N$ de Q et N sur M est le quotient de la somme directe $Q \oplus N$ de Q et N par l'image $\mathrm{im}(k)$ du morphisme $k\colon M \to Q \oplus N$ défini par $k(m) = h(m) \oplus -f(m)$.

Soit $\iota\colon Q \to Q \oplus_M N$ défini par $\iota(q) = q \oplus_M 0$. Evidemment, ι est un morphisme de A-modules.
Soit $\pi'\colon Q \oplus N \to P$ défini par $\pi'(q \oplus n) = g(n)$. Alors, π' est un morphisme de A-modules et $\pi'(\mathrm{im}(k)) = \{0\}$. En effet, soit $m \in M$. On a que $\pi'(k(m)) = \pi'(h(m) \oplus -f(m)) = g(-f(m)) = -g(f(m)) = 0$, car $g \circ f = 0$. Par conséquent, π' induit un morphisme de A-modules $\pi\colon Q \oplus_M N \to P$ tel que $\pi(q \oplus_M n) = g(n)$.
Montrons maintenant que la suite courte

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\iota} Q \oplus_M N \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

est exacte.
Soit $q \in Q$ tel que $\iota(q) = 0$. Alors, $q \oplus_M 0 = 0$ dans $Q \oplus_M N$. Cela veut dire que $q \oplus 0$ appartient à l'image de k, i.e., il existe $m \in M$ tel que $q \oplus 0 = h(m) \oplus -f(m)$. D'où, $h(m) = q$ et $f(m) = 0$. Mais f est injectif, donc $m = 0$. Par conséquent, $q = h(m) = 0$. D'où l'injectivité de ι.
Comme $\pi(\iota(q)) = \pi(q \oplus_M 0) = g(0) = 0$, il est clair que $\mathrm{im}(\iota) \subseteq \ker(\pi)$.
Pour montrer l'autre inclusion, soit $q \oplus_M n$ un élément de $Q \oplus_M N$ tel que $\pi(q \oplus_M n) = 0$. Cela veut dire que $g(n) = 0$. Comme $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$, il existe alors $m \in M$ tel que $f(m) = n$. On a donc, dans $Q \oplus M$, que

$$(q \oplus n) + k(m) = (q \oplus n) + (h(m) \oplus -f(m)) = (q + h(m)) \oplus 0.$$

Autrement dit, $\iota(q + h(m)) = q \oplus_M n$ dans $Q \oplus_M N$. Cela montre que $\ker(\pi) \subseteq \mathrm{im}(\iota)$.
Finalement, on montre que π est surjectif. Soit $p \in P$. Comme g est surjectif, il existe $n \in N$ tel que $g(n) = p$. L'élément $0 \oplus_M n$ est donc un élément de $Q \oplus_M N$ dont l'image par π est égale à p. D'où la surjectivité de π.

5. a. Soit $f_1\colon \mathbb{Q}[X,Y] \to \mathbb{Q}[X]$ le morphisme d'évaluation $f_1(P) = P(X,X)$. Soit $f_2\colon \mathbb{Q}[X,Y] \to \mathbb{Q}[X]$ le morphisme d'évaluation $f_2(P) = P(X,-X)$. On a alors un morphisme d'anneaux $f\colon \mathbb{Q}[X,Y] \to \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X]$ défini par $f(P) = (f_1(P), f_2(P))$.
Il est clair que $f(Y^2 - X^2) = 0$. D'où f induit un morphisme d'anneaux $g\colon A \to \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X]$.
Montrons que g est injectif. Pour cela il suffit de montrer que le noyau de f est égal à $(Y^2 - X^2)$. Comme on a déjà montre que $(Y^2 - X^2)$ est contenu dans le noyau de f, on montre que $\ker(f) \subseteq (Y^2 - X^2)$.

Soit $P \in \mathbb{Q}[X,Y]$ tel que $f(P) = 0$. Cela veut dire que $f_1(P) = 0$ er $f_2(P) = 0$. Comme $\ker(f_1) = (Y - X)$ et $\ker(f_2) = (Y + X)$, le polynôme P est divisible par $Y - X$ et $Y + X$. Ces deux derniers polynômes sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X,Y]$ et non associés. Comme $\mathbb{Q}[X,Y]$ est factoriel, le produit $(Y - X) \cdot (Y + X)$ divise P, i.e., $P \in (Y^2 - X^2)$. D'où l'injectivité de g.

Il est clair que $\mathrm{im}(g) \subseteq B$. En effet, soit $P \in A$. Alors, $g(P) = (Q, R)$ où $Q(X) = P(X,X)$ et $R(X) = P(X,-X)$. Evidemment, $Q(0) = P(0,0) = R(0)$, i.e., $g(P) \in B$.

Finalement, on montre que $B \subseteq \mathrm{im}(g)$. Soit $(Q,R) \in B$. On cherche $P \in A$ tel que $g(P) = (Q,R)$. Comme A est isomorphe au quotient $(\mathbb{Q}[X])[Y]/(Y^2 - X^2)$, tout élément P de A sécrit comme $P_1 + YP_2$, où $P_1, P_2 \in \mathbb{Q}[X]$. Supposons que $g(P) = (Q,R)$. On a alors que

$$\begin{cases} P_1 + XP_2 = Q \\ P_1 - XP_2 = R \end{cases}$$

Additionner les deux équations donne $P_1 = \frac{1}{2}(Q + R)$. Soustraire la deuxième de la première équation donne $2XP_2 = Q - R$. Comme $Q(0) = R(0)$, la différence $Q - R$ est divisible par X. D'où on obtient $P_2 = \frac{1}{2X}(Q - R)$. On voit immédiatement que les polynômes P_1 et P_2 ainsi définis donnent un élément $P = P_1 + YP_2$ de A dont l'image est égale à (Q,R). Cela montre que $B \subseteq \mathrm{im}(g)$.

b. D'après Proposition 1.5.11, on a un isomorphisme

$$A_X = (\mathbb{Q}[X,Y]/(Y^2 - X^2))_X \cong (\mathbb{Q}[X,Y]_X)/(Y^2 - X^2).$$

Dans l'anneau $\mathbb{Q}[X,Y]_X$, les idéaux $(Y - X)$ et $(Y + X)$ sont étrangers car $X = -\frac{1}{2}(Y - X) + \frac{1}{2}(Y + X)$ et X est inversible dans $Q[X,Y]_X$. D'après le Théorème Chinois,

$$(\mathbb{Q}[X,Y]_X)/(Y^2 - X^2) \cong (\mathbb{Q}[X,Y]_X)/(Y - X) \times (\mathbb{Q}[X,Y]_X)/(Y + X).$$

Ensuite, on observe que $\mathbb{Q}[X,Y]_X \cong (\mathbb{Q}[X]_X)[Y]$, si bien que

$$(\mathbb{Q}[X,Y]_X)/(Y - X) \cong (\mathbb{Q}[X]_X)[Y]/(Y - X) \cong \mathbb{Q}[X]_X.$$

De même,

$$(\mathbb{Q}[X,Y]_X)/(Y + X) \cong (\mathbb{Q}[X]_X)[Y]/(Y + X) \cong \mathbb{Q}[X]_X.$$