Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
MASTER 1 DE MATHEMATIQUES

GEOMETRIE ALGEBRIQUE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Examen terminal 1ère session, 4 juin 2020, 9h00–12h00

L'utilisation des documents de cours et de TD est autorisée ; celle d'appareils électroniques est interdite. Justifier les réponses.

Exercice 1. Soit $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée plane de classe $\mathcal{C}^\omega$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos(t) + t, -\sin(t)).$$

(a) Déterminer le vecteur tangent $\gamma'(t)$ à γ en t.

(b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles γ n'est pas régulière.

(c) Déterminer le vecteur d'accélération $\gamma''(t)$ de γ en t.

(d) Déterminer la courbure de γ en les points réguliers de γ.

(e) Déterminer le cercle osculateur de γ en $t = \frac{3}{2}\pi$.

Exercice 2. Soit U l'ouvert $]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^3$ l'application $\mathcal{C}^\omega$ définie par

$$\sigma(u, v) = ((\cos(u) + 2)\cos(v),\ (\cos(u) + 2)\sin(v),\ \tfrac{1}{2}\sin(u))$$

(a) Déterminer la différentielle $D_p\sigma$ de σ en tout point p de U.

(b) Montrer que $D_p\sigma$ est de rang 2 quel que soit $p \in U$.

(c) En déduire que σ est une surface paramétrée régulière de classe $\mathcal{C}^\omega$.

(d) Déterminer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale $E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$ de σ en p, pour tout $p \in U$.

(e) Déterminer le vecteur normal $\mathbf{N}_p$ à σ en p, pour tout $p \in U$.

(f) Déterminer les coefficients L, M, N de la seconde forme fondamentale $L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$ de σ en p, pour tout $p \in U$.

(g) Déterminer la courbure de Gauss K_p de σ en le point $p = (0, 0)$ de U.

Exercice 3. Soit K un corps algébriquement clos. Soit $F = Y^4 - X^5 \in K[X, Y]$ et soit $V = Z(F) \subseteq K^2$.

(a) Dire pourquoi K^1 est une variété algébrique affine sur K.

(b) Montrer que V est une variété algébrique affine sur K.

(c) Construire un morphisme bijectif $f\colon K^1 \to V$ de variétés algébrique affines sur K.

(d) Montrer que f n'est pas un isomorphisme de variétés algébriques affines sur K.

(e) Le morphisme f induit-il un isomorphisme $f^\star$ du corps des fonctions rationnelles $K(V)$ dans $K(K^1)$?