Université de Bretagne Occidentale, Département de Mathématiques
MASTER 1, MATHEMATIQUES

Groupes et anneaux

Examen terminal, 15 janvier 2013, 9h00–12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Démontrer l'énoncé suivant. Un anneau A est noetherien si et seulement si chaque chaîne croissante d'idéaux de A

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$$

est stationnaire, c-à-d, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $I_{N+k} = I_N$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 1. Soit $(M, \cdot)$ un monoïde. Soit $x \in M$. On dit que x est un élément *régulier* de M si $x \cdot y = x \cdot z$ implique que $y = z$, quels que soient $y, z \in M$. Notons encore m_x l'application de M dans lui-même de multiplication à gauche par x, i.e., $m_x(y) = xy$.

a. Montrer que x est régulier si et seulement si l'application m_x est injective.

b. Montrer que x est inversible dans M si et seulement si m_x est bijective.

On dit qu'un monoïde M est *régulier* si tous ses éléments sont réguliers.

c. Montrer qu'un monoïde régulier fini est un groupe.

d. En déduire qu'un anneau intègre fini est un corps.

Soit f un morphisme de monoïdes de M dans un groupe G.

e. Montrer que si f est injectif alors M est régulier.

f. Est-ce que la réciproque est vraie ?

Exercice 2. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, non forcément unitaire, ni commutatif.

a. Montrer que $0 \cdot a = 0$ quel que soit $a \in A$.

b. Montrer que $A = \{0\}$ si A est un groupe pour la loi de composition interne $\cdot$.

Exercice 3. Montrer que tout groupe de cardinal 2013 est cyclique.

Exercice 4. Soit $\mathbb{F}_3$ le corps à 3 éléments. Soit G le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ des matrices 2×2 à valeurs dans $\mathbb{F}_3$ de déterminant 1. Soit $I \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ la matrice identité et soient $J, U \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ définies par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le nombre de bases que possède l'espace vectoriel $\mathbb{F}_3^2$.

b. En déduire le cardinal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.

c. En déduire le cardinal de G.

d. Déterminer l'ordre de J.

e. Déterminer l'ordre de U.

f. Déterminer le centre Z de G.

Faisons agir G sur lui-même par conjugaison, dans le but de déterminer les classes de conjugaison de G.

g. Déterminer le stabilisateur G_U de U.

h. Quel est le cardinal de l'orbite $O(U)$ de U ?

i. Montrer que $U^2 \notin O(U)$.

j. Combien d'éléments d'ordre 3 contient-il au moins, G ?

k. Montrer que si $A \in G$ est d'ordre 3, $-A$ est un élément de G d'ordre 6.

l. Combien d'éléments d'ordre 6 contient-il au moins, G ?

m. Montrer que le complémentaire du sous-ensemble des éléments de G d'ordre 3 ou 6 est un 2-sylow de G.

n. En déduire le nombre d'éléments de G d'ordre 3 et 6 .

o. Déterminer le stabilisateur G_J de J.

p. Quel est le cardinal de l'orbite $O(J)$ de J ?

q. Déterminer le nombre déléments d'ordre 4 de G.

r. Combien de classes de conjugaison G possède-t-il ?

s. Préciser le cardinal de chaque classe de conjugaison de G.

t. Déterminer le nombre de sous-groupes distingués de G

Exercice 5. Soit $a \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z})$ définie par

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 12 & 8 & 20 \end{pmatrix}.$$

Soit C le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par les colonnes de a, et L le sous-groupe de $\mathbb{Z}^3$ engendré par les lignes de a.

a. Déterminer des matrices $u \in M_2(\mathbb{Z})$ et $v \in M_3(\mathbb{Z})$, produits de matrices élémentaires, et des entiers relatifs d, e, avec $d|e$, tels que $uav = \mathrm{diag}(d, e)$.

b. Déterminer le rang et les facteurs invariants du quotient $\mathbb{Z}^2/C$. Le quotient $\mathbb{Z}^2/C$ est-il cyclique ?

c. Même questions pour le quotient $\mathbb{Z}^3/L$.

Exercice 6. Soit K un corps. Soit I l'idéal de $K[X, Y, Z]$ engendré par les 3 polynômes X, Y, Z. Le but de cet exercice est de montrer que l'idéal I ne peut être engendré par 2 éléments.

a. Montrer de deux manières différentes que I est un idéal maximal de $K[X, Y, Z]$.

Lorsque J est un idéal de $K[X, Y, Z]$, on considère J comme K-espace vectoriel par restriction de la loi externe $K[X, Y, Z] \times J \longrightarrow J$ à $K \times J$, où K est considéré comme sous-anneau des polynômes constants de $K[X, Y, Z]$.

b. Déterminer une base du K-espace vectoriel I.

c. Déterminer une base du K-espace vectoriel I^2.

d. Déterminer une base du K-espace vectoriel quotient I/I^2.

e. Quelle est la dimension du K-espace vectoriel I/I^2 ?

f. Soient $G \in K[X, Y, Z]$ et $F \in I$. Montrer que $\overline{GF} = G(0) \cdot \overline{F}$ dans I/I^2.

Nous montrons par l'absurde que I ne peut être engendré par 2 éléments. Supposons donc dans la suite qu'il existe deux polynômes $F_1, F_2 \in I$ tels que $I = (F_1, F_2)$.

h. Montrer que la famille $\overline{F_1}, \overline{F_2}$ est génératrice du K-espace vectoriel I/I^2.

i. Conclure.