Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
MASTER 1 DE MATHEMATIQUES

ALGEBRE

Examen terminal, 10 janvier 2019, 14h00–17h00

L'utilisation des documents est autorisée ; celle d'appareils électroniques interdite.

Exercice 1. Soit A un anneau et S et T deux parties multiplicatives de A. Soit $\iota\colon A \to S^{-1}A$ et $\kappa\colon A \to T^{-1}A$ les morphismes de localisation respectifs. On note encore ST le sous-ensemble de A défini par

$$ST = \{st \mid s \in S, t \in T\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que les localisations successives $\iota(T)^{-1}(S^{-1}A)$ et $\kappa(S)^{-1}(T^{-1}A)$ sont isomorphes.

(a) Montrer que $\iota(T)$ est une partie multiplicative de $S^{-1}A$.

(b) Montrer que ST est une partie multiplicative de A.

(c) Montrer que l'anneau $\iota(T)^{-1}(S^{-1}A)$ est isomorphe à l'anneau $(ST)^{-1}A$.

(d) En déduire que $\iota(T)^{-1}(S^{-1}A)$ et $\kappa(S)^{-1}(T^{-1}A)$ sont isomorphes.

Exercice 2. Déterminer le cardinal de l'anneau

$$(\mathbb{F}_2[X]/(X^4 - X))_{\bar{X}^5}$$

obtenu du quotient $\mathbb{F}_2[X]/(X^4 - X)$ en localisant par rapport à la partie multiplicative $\{1, \bar{X}^5, \bar{X}^{10}, \bar{X}^{15}, \ldots\}$.

Exercice 3. Soit A le sous-ensemble du corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(X, Y)$ des fractions F de la forme

$$F = \frac{H}{(X^2 + Y^2)^d}$$

où d est un entier naturel et $H \in \mathbb{R}[X, Y]$ est un polynôme homogène de degré $2d$.

(a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}(X, Y)$.

(b) Montrer que tout polynôme homogène $H \in \mathbb{R}[X, Y]$ non nul de degré $2d$ s'écrit sous la forme

$$H = u \cdot P_1 \cdots P_r \cdot P_{r+1} \cdots P_{r+s},$$

où $u \in \mathbb{R}^\star$, $P_1, \ldots, P_{r+s} \in \mathbb{R}[X, Y]$ sont homogènes et irréductibles, avec $P_1, \ldots, P_r$ de degré 1 et $P_{r+1}, \ldots, P_{r+s}$ de degré 2, et $r, s \in \mathbb{N}$. (Indication : $\frac{H}{Y^{2d}} = P(\frac{X}{Y})$ dans $\mathbb{R}(X, Y)$ pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[Z]$.)

(c) Expliquer dans quel sens cette écriture est unique.

(d) Montrer que toute fraction $F \in A$ non nulle s'écrit sous la forme

$$F = u \cdot \frac{P_1 \cdots P_r \cdot P_{r+1} \cdots P_{r+s}}{(X^2 + Y^2)^d},$$

où $u \in \mathbb{R}^\star$, et $P_1, \ldots, P_{r+s} \in \mathbb{R}[X, Y]$ sont homogènes et irréductibles, avec $P_1, \ldots, P_r$ de degré 1 et $P_{r+1}, \ldots, P_{r+s}$ de degré 2 dont aucun n'est associé à $X^2 + Y^2$ dans $\mathbb{R}[X, Y]$.

(e) Expliquer dans quel sens cette écriture est unique.

(f) En déduire que toute suite croissante d'idéaux principaux de A est stationnaire.

(g) En déduire également que les fractions de la forme

$$\frac{P_1P_2}{X^2+Y^2} \quad \text{et} \quad \frac{P}{X^2+Y^2}$$

sont irréductibles dans l'anneau A, où $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X,Y]$ sont homogènes de degré 1, et $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ est homogène irréductible de degré 2 et non associé à X^2+Y^2.

(h) En déduire que A n'est pas factoriel.

Soit $I = (U,V)$ l'idéal de A engendré par les fractions rationnelles U et V définies par

$$U = \frac{(X+Y)^2}{X^2+Y^2} \quad \text{et} \quad V = \frac{X^2-Y^2}{X^2+Y^2}.$$

(i) Montrer que I n'est pas principal.

(j) Montrer que I est un idéal maximal de A. (Indication : $U(1,-1) = 0$ et $V(1,-1) = 0$.)

Exercice 4. Soit f le polynôme homogène symétrique $X_1^4+X_2^4+X_3^4$ dans $\mathbb{F}_3[X_1,X_2,X_3]$ Déterminer un polynôme $g \in \mathbb{F}_3[Y_1,Y_2,Y_3]$ tel que

$$f = g(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),$$

où $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ sont les polynômes symétriques élémentaires dans $\mathbb{F}_3[X_1,X_2,X_3]$. (On pourra utiliser que $(A+B)^3 = A^3+B^3$ quels que soient $A,B \in \mathbb{F}_3[X_1,X_2,X_3]$.)

Exercice 5. Soit $r \in \mathbb{Z}$ le résultant $\text{Rés}(X^6-1, X^4-2)$ des polynômes X^6-1 et X^4-2 de $\mathbb{Z}[X]$.

(a) Montrer que $7|r$ dans $\mathbb{Z}$ sans calculer r.

(b) Calculer r. (Indication : les racines de X^4-2 dans $\mathbb{C}$ sont $\pm\sqrt[4]{2}$ et $\pm i\sqrt[4]{2}$.)

Barème indicatif sur 100 points :

Exercice 1	15 pts
Exercice 2	12 pts
Exercice 3	40 pts
Exercice 4	20 pts
Exercice 5	13 pts