UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Examen terminal, 17 janvier 2003, 10h30–12h30

Documents et calculatrices sont interdits. On pourra utiliser tous les résultats du cours et des TD.

1. Soit G un groupe de cardinal 105 agissant à gauche sans point fixe sur un ensemble E de cardinal 49. On suppose qu'il existe $x, y \in E$ tels que $y \notin Gx$, $|G_x| \leq 6$ et $|G_y| \leq 14$. Montrer que le nombre d'orbites de E pour l'action de G est égal à 3 ou 5.

2. Soit S un sous-ensemble de S_5 ne contenant que des transpositions.

a. Montrer que $|S| \geq 4$ lorsque $\langle S \rangle = S_5$
b. Donner un exemple où $|S| = 4$ et $\langle S \rangle = S_5$.
c. Donner un exemple où $|S| = 6$ et $\langle S \rangle \neq S_5$.
d. Montrer que $\langle S \rangle = S_5$ lorsque $|S| \geq 7$.

3. a. Montrer que $S_3 \times S_3$ a un et un seul sous-groupe N de cardinal 9.
b. Montrer que N est distingué dans $S_3 \times S_3$.
c. Montrer que le quotient $(S_3 \times S_3)/N$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
d. Montrer que $S_3 \times S_3$ a exactement 3 sous-groupes de cardinal 18.

4. Soit N le sous-groupe distingué de S_4 des doubles transpositions, i.e.,

$$N = \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

Montrer qu'il existe un sous-groupe H de S_4 et un morphisme $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ tels que S_4 est isomorphe au produit semi-direct $N \rtimes_\alpha H$.