UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Contrôle continu, le 6 décembre 2002, 12h–12h15

Ce contrôle est noté sur 5 points. Chaque bonne réponse vaut $\frac{1}{2}$ point, chaque mauvaise réponse vaut $-\frac{1}{2}$ point. Une non-réponse n'est pas comptabilisée. La note du controle est égale à la somme des points obtenus, avec un minimum de 0. Aucune justification de réponse n'est demandée. Répondre directement sur la feuille après chaque question. Aucun document n'est autorisé. N'oubliez pas d'inscrire votre nom et groupe de TD.

Nom:

TD:

Répondez par "vrai" ou par "faux":

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'action de S_n sur $\{1, \dots, n\}$ est libre.

2. Soit G un groupe fini et soit E un ensemble sur lequel G agit à gauche. Alors, toute orbite de E est de cardinal fini, et ce cardinal divise $|G|$.

3. Toute action à gauche d'un groupe à 11 éléments sur un ensemble à 21 éléments est triviale.

4. Soit G le sous-groupe de S_5 engendré par $\{(1,5),(2,4,3)\}$. On considère l'action à gauche de G sur $\{1, \dots, 5\}^2$ définie par $\sigma \star (i,j) = (\sigma(i), \sigma(j))$. Alors, E contient une orbite de cardinal 5.

5. Soit G un groupe de cardinal $187 (= 11 \times 17)$ qui agit à gauche sans point fixe sur un ensemble E de cardinal 39. Alors E contient exactement 3 orbites.

6. Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G. Supposons que $g'hg^{-1} \in H$ quels que soient $h \in H$ et $g, g' \in G$. Alors, H est distingué dans G.

7. Soit G un groupe et soit N un sous-groupe distingué de G. Si l'indice de N dans G est égal à 6, le groupe quotient G/N est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

8. Soit G un groupe et soit N un sous-groupe distingué de G. Soient $x, y \in G$ tels que $y^3, (xy)^2, xyx^{-1}y^{-1} \in N$. Alors $x \in N$.

9. Un groupe G est non commutatif si et seulement si $[G,G] = G$.

10. Soient G et G' des groupes et soit $f \colon G \to G'$ une application satisfaisant $f(xy) = f(y)f(x)$ quels que soient $x, y \in G$. Soit $H = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$, où e' est l'élément neutre de G'. Alors H est un sous-groupe distingué de G.