UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Contrôle continu, le 22 novembre 2002, 12h–12h15

Ce contrôle est noté sur 5 points. Chaque bonne réponse vaut $\frac{1}{2}$ point, chaque mauvaise réponse vaut $-\frac{1}{2}$ point. Une non-réponse n'est pas comptabilisée. La note du controle est égale à la somme des points obtenus, avec un minimum de 0. Aucune justification de réponse n'est demandée. Répondre directement sur la feuille après chaque question. Aucun document n'est autorisé. N'oubliez pas d'inscrire votre nom et groupe de TD.

Nom:

TD:

Répondez par "vrai" ou par "faux":

1. Le groupe $S_3 \times S_5$ est isomorphe à un sous-groupe de S_8.

2. Soit $\sigma \in S_9$. On a

$$\sigma \cdot (2,9,3,6) \cdot (6,8,7) \cdot \sigma^{-1} = (\sigma(2), \sigma(9), \sigma(3), \sigma(6)) \cdot (\sigma(6), \sigma(8), \sigma(7)).$$

3. Les éléments

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de S_5 sont conjugués.

4. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ les permutations cycliques de S_{36} de longueur 35. Les permutations $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ engendrent S_{36}.

5. Soit $n \geq 3$. Tout morphisme de S_n dans un groupe abélien est trivial.

6. Soit $n \geq 3$. Tout morphisme d'un groupe abélien dans S_n est trivial.

7. Il existe $\sigma \in S_7$ satisfaisant $\sigma^5 = (2,4,5)$ et $\sigma^{11} = (1,3,6,7)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient G et H des groupes. Supposons que $g_1, \ldots, g_n \in G$ engendrent G, et $h_1, \ldots, h_n \in H$ engendrent H. Alors, les éléments $(g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n)$ engendrent $G \times H$.

9. Soit $\star$ la loi de composition externe $S_3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\sigma \star (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}),$$

pour $\sigma \in S_3$ et $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. La loi $\star$ est une action à gauche de S_3 sur $\mathbb{R}^3$.

10. On fait agir à gauche le groupe $G = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sur l'ensemble $E = (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^3$ par

$$\overline{n} \cdot (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (\overline{n} + \overline{x}, \overline{n} + \overline{y}, \overline{n} + \overline{z}),$$

pour $\overline{n} \in G$ et $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in E$. L'ensemble E contient 100 orbites.