UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Examen terminal, 30 mai 2001, 8h-11h

Documents et calculatrices sont interdits. On pourra utiliser tous les résultats du cours, du polycopié et des TD à condition d'y référer. Barème indicatif : **1** : 2 points, **2** : 5 points, **3** : 3 points, **4** : 4 points, **5** : 6 points.

1. Soit G un groupe. Un élément $y \in G$ est un *carré* de G s'il existe $x \in G$ tel que $y = x^2$. Soit H le sous-groupe de G engendré par les carrés de G.

a. Montrer que H est distingué dans G.
b. Montrer que le quotient G/H est abélien.
c. Soient $a, b \in G$ et soit $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Montrer que $[a, b]$ s'écrit comme un produit de carrés de G.

2. Déterminer le nombre de groupes d'ordre 2001 à isomorphisme près.

3. Soit G un groupe fini. Soient E et E' deux ensembles munis d'une action transitive de G à gauche. Soit $\varphi\colon E \to E'$ une application vérifiant

$$\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$$

pour tout $x \in E$ et tout $g \in G$. Soient s et s' le cardinal de E et E' respectivement. Montrer que s' divise s.

4. Soient G et G' des groupes finis et $f\colon G \to G'$ un morphisme surjectif. Soit p un nombre premier.

a. Soit S un p-sylow de G. Montrer que $f(S)$ est un p-sylow de G'.
b. Soient s et s' le nombre de p-sylows de G et G' respectivement. Montrer que s' divise s.

5. Soient G et H des groupes et $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(G)$ un morphisme. Soient G' et H' des sous-groupes de G et H respectivement.

a. Montrer que le sous-ensemble $G' \times H'$ est un sous-groupe du produit semi-direct $G \rtimes_\alpha H$ si et seulement si $\alpha(y)(x) \in G'$ quels que soient $x \in G'$ et $y \in H'$.
b. Dans le cas où le sous-ensemble $G' \times H'$ est un sous-groupe de $G \rtimes_\alpha H$, montrer que ce sous-groupe est un produit semi-direct de G' et H' relativement à un morphisme $\alpha'\colon H' \to \mathrm{Aut}(G')$ que l'on précisera.

T. S. V. P.

c. Montrer que le sous-ensemble $G' \times H'$ de $G \rtimes_\alpha H$ est un sous-groupe distingué si et seulement si

   (i) $\alpha(h)(x) \in G'$ pour tout $x \in G'$ et $h \in H$,

   (ii) H' est distingué dans H, et

   (iii) $g \cdot x \cdot \alpha(y)(g^{-1}) \in G'$ pour tout $x \in G'$, $y \in H'$ et $g \in G$.

d. Soient $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $H = S_4$ et $\alpha(h)(g) = \varepsilon(h) \cdot g$ pour tout $g \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $h \in S_4$, où ε est le morphisme de signature. Déterminer une suite de Jordan-Hölder pour $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\alpha S_4$.

T. S. V. P.