UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Corrigé, examen terminal, 17 janvier 2003, 10h30–12h30

1. Comme $105 = 3\times5\times7$, les diviseurs de 105 sont $1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105$. Comme $|Gx| \cdot |G_x| = |G| = 105$ et $|G_x| \leq 6$, le cardinal de l'orbite de x satisfait $|Gx| \geq \frac{105}{6} = 17,5$. D'où $|Gx| \geq 18$. Comme $|Gx|$ divise 105, $|Gx| = 21,\ 35$ ou 105. Comme Gx est un sous-ensemble de E qui est de cardinal 49, $|Gx| = 21$ ou 35. **(1 pt)**

De même, $|Gy| \geq \frac{105}{14} = 7,5$ et $|Gy| = 15,\ 21,\ 35$ ou 105. D'après l'hypothèse que $y \notin Gx$, les orbites Gx et Gy sont disjointes. D'où $49 = |E| \geq |Gx| + |Gy|$. Comme $35 + 15 = 50 > 49$, $|Gx| = 21$ et $|Gy| = 15$ ou 21. **(1 pt)**

D'après ce qui précède, le complémentaire $E \setminus (Gx \cup Gy)$ est de cardinal 7 ou 13. Ce complémentaire est la réunion disjointe d'orbites de cardinal 3, 5 ou 7, puisque G agit sans point fixe. Soient a, b, c le nombre d'orbites de cardinal $3, 5, 7$, respectivement. Si $|E \setminus (Gx \cup Gy)| = 7$, on a $3a + 5b + 7c = 7$. Comme $a, b, c \in \mathbb{N}$, on a forcément $a = b = 0$ et $c = 1$. Dans ce cas, le nombre d'orbites est égal à 3 **(1 pt)**. Si $|E\setminus(Gx\cup Gy)| = 13$, on a $3a + 5b + 7c = 13$. Dans ce cas-là on a $(a, b, c) = (1, 2, 0)$ ou $(2, 0, 1)$. Les deux possibilités donnent lieu à 5 orbites **(1 pt)**.

2. a. Supposons que $\langle S\rangle = S_5$. La réunion $\bigcup_{\sigma\in S} \mathrm{supp}(\sigma)$ est égale à $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. En effet, s'il y a un $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ qui est point fixe de tous les éléments de S, alors i est point fixe de tous les éléments de S_5. Contradiction. Donc $\bigcup_{\sigma\in S} \mathrm{supp}(\sigma) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, en particulier $|S| \geq 3$ **(1 pt)**.

Supposons que $|S| = 3$, i.e., $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Comme $\bigcup_{i=1}^{3} \mathrm{supp}(\sigma_i) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\mathrm{supp}(\sigma_i)$ est disjoint de $\mathrm{supp}(\sigma_j)$ pour tout $j \in \{1, 2, 3\}\setminus\{i\}$. On peut supposer que $i = 1$. Donc σ_1 commute avec σ_2 et σ_3. Comme S_5 est engendré par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, la permutation σ_1 est dans le centre de S_5. Or, le centre de S_5 est trivial. Contradiction **(1 pt)**.

b. Soit $S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$. D'après les TD, $\langle S\rangle = S_5$ **(1 pt)**.

c. Soit $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. Comme $\sigma(5) = 5$ quel que soit $\sigma \in S$, $\langle S\rangle \neq S_5$ **(1 pt)**.

d. Il suffit de montrer que $\langle S\rangle = S_5$ si $|S| = 7$. Supposons donc que $|S| = 7$. Comme S_5 est engendré par l'ensemble de ses transpositions, il suffit de montrer que toute transposition de S_5 appartient à $\langle S\rangle$.

Soit $(i,j) \in S_5$ une transposition. Si $(i,j) \in S$, on a forcément $(i,j) \in \langle S \rangle$. On peut donc supposer que $(i,j) \notin S$. Comme S_5 a exactement 10 transpositions, et comme S en contient 7, il existe un entier $k \in \{1,2,3,4,5\} \backslash \{i,j\}$ tel que (i,k) et (j,k) appartiennent toutes les deux à S. Du coup,

$$(i,j) = (i,k)(j,k)(i,k) \in \langle S \rangle.$$

(2 pt)

3. a. Supposons que N est un sous-groupe de $S_3 \times S_3$ de cardinal 9. On a $x^9 = e$ pour tout $x \in N$. Du coup

$$N \subseteq \{(\sigma, \tau) \in S_3 \times S_3 \,|\, \sigma^9 = \mathrm{id} \text{ et } \tau^9 = \mathrm{id}\}.$$

Or, ce dernier sous-ensemble de S_3^2 est égal à $\{\mathrm{id}, (1,2,3), (3,2,1)\}^2$, et est donc de cardinal 9. D'où

$$N = \{\mathrm{id}, (1,2,3), (3,2,1)\} \times \{\mathrm{id}, (1,2,3), (3,2,1)\}.$$

Ceci montre l'unicité **(1 pt)**. Pour l'existence, il suffit de remarquer que le sous-ensemble $\{\mathrm{id}, (1,2,3), (3,2,1)\}^2 = A_3^2$ de S_3^2 est un sous-groupe de S_3^2 de cardinal 9 **(1 pt)**.

b. Soit $g \in S_3^2$. Comme gNg^{-1} est un encore un sous-groupe de S_3^2 de cardinal 9, $gNg^{-1} = N$ d'après le a. Par conséquent, N est distingué dans S_3^2 **(1 pt)**.

c. On sait que $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par conséquent,

$$S_3^2/N = (S_3 \times S_3)/(A_3 \times A_3) \cong (S_3/A_3) \times (S_3/A_3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(1 pt)

d. Soit $\pi \colon S_3^2 \to S_3^2/N$ le morphisme de passage au quotient. Comme $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ contient 3 sous-groupes H_1, H_2, H_3 de cardinal 2, les sous-groupes $K_1 = \pi^{-1}(H_1), K_2 = \pi^{-1}(H_2), K_3 = \pi^{-1}(H_3)$ sont des sous-groupes de S_3^2 de cardinal 18, et 2-à-2 distincts **(1 pt)**. Il faut montrer que S_3^2 ne contient pas d'autres sous-groupes de cardinal 18.

Soit K un sous-groupe de S_3^2 de cardinal 18. On montre que $K \supseteq N$. Soient $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 \colon S_3^2 \to S_3$ les deux projections. Comme $\mathrm{pr}_i(K)$ est un sous-groupe de S_3, son cardinal est au plus 6. Il s'ensuit que $\ker(\mathrm{pr}_i) \cap K$ est au moins de cardinal 3, pour $i = 1, 2$. En particulier, K contient $A_3 \times \{\mathrm{id}\}$ et $\{\mathrm{id}\} \times A_3$. Donc, K contient $(A_3 \times \{\mathrm{id}\}) \cdot (\{\mathrm{id}\} \times A_3) = N$ **(1 pt)**. D'après le cours, $K = \pi^{-1}(H)$ pour un sous-groupe H de S_3^2/N. Comme K est de cardinal 18, H est de cardinal 2. Il s'ensuit que $H = H_i$ et $K = K_i$, pour un certain $i \in \{1,2,3\}$ **(1 pt)**.

4. Soit H le sous-groupe $\{\mathrm{id}, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (3,2,1)\}$ de S_4. On a $N \cap H = \{\mathrm{id}\}$ **(1 pt)**. Comme, de plus, $|N| = 4$ et $|H| = 6$, on a $|NH| = 24$. Il s'ensuit que $NH = S_4$ **(1 pt)**. D'après le cours, il existe donc un morphisme $\alpha \colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ tels que S_4 est isomorphe au produit semi-direct $N \rtimes_\alpha H$ **(1 pt)**.