UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Contrôle continu, le 22 novembre 2002

CORRIGE et EXPLICATIONS

1. Vrai. Faire agir à gauche S_8 sur l'ensemble E des parties à 3 éléments de $\{1, \dots, 8\}$. Le stabilisateur de $\{1, 2, 3\}$ est isomorphe à $S_3 \times S_5$.

2. Vrai.

$$\sigma \cdot (2,9,3,6) \cdot (6,8,7) \cdot \sigma^{-1} = (\sigma \cdot (2,9,3,6) \cdot \sigma^{-1}) \cdot (\sigma \cdot (6,8,7) \cdot \sigma^{-1}) = \\ = (\sigma(2), \sigma(9), \sigma(3), \sigma(6)) \cdot (\sigma(6), \sigma(8), \sigma(7)).$$

3. Vrai. Le premier élément des deux est égal à $(1,3)(2,4,5)$. Le deuxième est égal à $(1,3,4)(2,5)$. Soit $\sigma \in S_5$ défini par $\sigma = (1,2)(3,5,4)$. On a

$$\sigma \cdot (1,3) \cdot (2,4,5) \cdot \sigma^{-1} = (\sigma \cdot (1,3) \cdot \sigma^{-1}) \cdot (\sigma \cdot (2,4,5) \cdot \sigma^{-1}) = \\ = (\sigma(1), \sigma(3)) \cdot (\sigma(2), \sigma(4), \sigma(5)) == (2,5) \cdot (1,3,4) = (1,3,4) \cdot (2,5).$$

4. Faux. Une permutation de longueur impaire est de signature $+1$. Par conséquent, $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in A_{36}$. En particulier, le sous-groupe engendré $H = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ est contenu dans A_{36}. Comme $A_{36} \neq S_{36}$, $H \neq S_{36}$, i.e., les cycles $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ n'engendrent pas S_{36}.

5. Faux, le morphisme signature $\varepsilon \colon S_3 \to \mu_2$ n'est pas trivial car $\varepsilon(1,2) = -1 \neq 1$.

6. Faux. Soit H le sous-groupe de S_3 engendré par $(1,2)$. Le groupe H est commutatif et le morphisme d'inclusion $i \colon H \to S_3$ n'est pas trivial.

7. Faux. Si $\sigma \in S_7$ satisfait $\sigma^5 = (2,4,5)$ et $\sigma^{11} = (1,3,6,7)$, on a forcément

$$\sigma = \sigma^{11} \cdot (\sigma^5)^{-2} = (1,3,6,7)(2,4,5).$$

Or,

$$((1,3,6,7)(2,4,5))^5 = (1,3,6,7)^5 (2,4,5)^5 = (1,3,6,7)(2,5,4) \neq (2,4,5).$$

8. Faux. Prendre $n = 1$, $G = H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $g_1 = h_1 = \overline{1}$. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est bien engendré par $\overline{1}$. Comme $\overline{1}$ est d'ordre 2, l'élément $(\overline{1}, \overline{1})$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est d'ordre 2. Donc, le sous-groupe engendré par $(\overline{1}, \overline{1})$ est de cardinal $2 \neq 4 = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}|$.

9. Faux. Soient $\tau = (1,2)$, $\sigma = (1,2,3)$ des éléments de S_3, et soit $x = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$. Le produit $\tau\sigma$ est égal à $(2,3)$. On a

$$\tau \star (\sigma \star (1,2,3)) = \tau \star (2,3,1) = (3,2,1) \neq (1,3,2) = (\tau\sigma) \star (1,2,3).$$

10. Vrai. L'action est libre, donc

$$|G \backslash E| = \frac{|E|}{|G|} = \frac{10^3}{10} = 10^2 = 100.$$