UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Contrôle continu, le 8 novembre 2002

CORRIGE et EXPLICATIONS

1. Vrai. Soient $a, b \in \langle x \rangle$. Alors $a = x^i$ et $b = x^j$, pour certains $i, j \in \mathbb{Z}$. On a $ab = x^i x^j = x^{i+j} = x^{j+i} = x^j x^i = ba$.

2. Faux. Soit $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et soient $x = 1$ et $y = 2$. On a $\langle x \rangle = \langle y \rangle = G$. Mais $y \neq x, -x$.

3. Faux. Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $x = 1$. Soient $m = 3$ et $n = 2$. Alors, $mx = x$ est d'ordre n. Mais x n'est pas d'ordre mn.

4. Vrai. De manière générale, un groupe fini G est isomorphe à un sous-groupe de S_m, où $m = |G|$. Comme $|S_n| = n!$, le groupe S_n est isomorphe à un sous-groupe de $S_{n!}$.

5. Vrai. Soit $\sigma = (1,2,3,4,5,6,7)(8,9,10)(11,12) \in S_{12}$. L'ordre de σ est égal à $7 \times 3 \times 2 = 42$.

6. Vrai. On a $\sigma = (1,5,3,10,8,2)(4,6,7,9)$. Donc σ est d'ordre $\mathrm{ppcm}(6,4) = 12$.

7. Vrai. Soient $x', y' \in G'$. Comme f est surjectif, il existe $x, y \in G$ tels que $f(x) = x'$ et $f(y) = y'$. Comme f et $g \circ f$ sont des morphismes,

$$\begin{aligned} g(x'y') &= g(f(x)f(y)) = g(f(xy)) = (g \circ f)(xy) = \\ &= (g \circ f)(x)(g \circ f)(y) = g(f(x))g(f(y)) = g(x')g(y'). \end{aligned}$$

Par conséquent, g est un morphisme.

8. Vrai. Soient $x, y \in G$. Comme g et $g \circ f$ sont des morphismes,

$$g(f(xy)) = (g \circ f)(xy) = (g \circ f)(x)(g \circ f)(y) = g(f(x))g(f(y)) = g(f(x)f(y)).$$

Comme g est injectif, $f(xy) = f(x)f(y)$. Par conséquent, f est un morphisme.

9. Faux. Soit $G = S_3$ et soient $f = f' = \mathrm{id}$. Dans ce cas $f''(x) = x^2$ pour tout $x \in S_3$. Or, $f''((1,2)(1,3)) = (1,2,3) \neq \mathrm{id} = f''(1,2)f''(1,3)$, i.e., f'' n'est pas un morphisme.

10. Faux. Soit $G = \mathbb{R}^\star$. Soient $m = n = 1 \in \mathbb{Z}$ et $x = -1 \in G$. On a $(m+n) \star x = x^2 = 1 \neq -1 = m \star (n \star x)$.