UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Corrigé de contrôle du 9 mars 2002

1. Comme σ et τ sont de signature $+1$, on a $\sigma, \tau \in A_4$. Le sous-groupe G est donc un sous-groupe de A_4. Comme

$$\sigma = (1,2,3), \quad \tau = (1,2,4), \quad \tau\sigma^2 = (1,3,4), \quad \text{et} \quad \tau^2\sigma = (2,3,4),$$

tous les 3-cycles de S_4 appartiennent à G. D'où le cardinal de G est au moins égal à 8. Comme le cardinal de G divise $\# A_4 = 12$, le cardinal de G est égal à 12, et, en fait, $G = A_4$.

2. a. Non, les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont bien dans D mais leur produit

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'appartient pas à D. Donc D n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

b. Non, les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont bien dans E mais leur produit

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'appartient pas à E. Donc E n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

3. Supposons que $f\colon S_4 \to \mu_4$ est un morphisme surjectif. Soit $\sigma \in S_4$ tel que $f(\sigma) = i$. Comme $i \in \mu_4$ est d'ordre 4, σ est d'ordre au moins 4. D'où, σ est un 4-cycle. Le même argument montre qu'il y a un 4-cycle σ' dans S_4 tel que $f(\sigma') = -i$. Comme σ et σ' sont tous les deux des 4-cycles, il existe $\tau \in S_4$ tel que $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$. Appliquer f donne

$$-i = f(\sigma') = f(\tau\sigma\tau^{-1}) = f(\tau)f(\sigma)f(\tau)^{-1} = i,$$

car μ_4 est commutatif. Contradiction.

4. a. Soit $(x, y) \in E^2$. On a bien $\mathrm{id} \cdot (x, y) = (x, y)$. Soient $\sigma, \tau \in S_n$. Alors,

$$(\sigma\tau) \cdot (x, y) = ((\sigma\tau)(x), (\sigma\tau)(y)) = (\sigma(\tau(x)), \sigma(\tau(y))) = \\ = \sigma \cdot (\tau(x), \tau(y)) = \sigma \cdot (\tau \cdot (x, y)).$$

Cela montre que la loi $\cdot$ est une action à gauche de S_n sur E^2.

b. Si $n = 0$, E^2 est vide. Donc le nombre d'orbites est égal à 0 lorsque $n = 0$. Si $n = 1$, E^2 est un singleton. Donc le nombre d'orbites est égal à 1 lorsque $n = 1$. Supposons dans la suite que $n \geq 2$. On montre que E^2 contient deux orbites $S_n(1, 1)$ et $S_n(1, 2)$. En effet, on a bien $S_n(1, 1) \cap S_n(1, 2) = \emptyset$. Montrons que $E^2 = S_n(1, 1) \cup S_n(1, 2)$. Soit $(x, y) \in E^2$. Si $x \neq y$, il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma(1) = x$ et $\sigma(2) = y$. D'où $\sigma \cdot (1, 2) = (x, y)$, i.e., $(x, y) \in S_n(1, 2)$ lorsque $x \neq y$. Si $x = y$, il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma(1) = x$ et $\sigma(1) = y$. D'où $\sigma \cdot (1, 1) = (x, y)$, i.e., $(x, y) \in S_n(1, 1)$. Cela montre que $S_n(1, 1) \cup S_n(1, 2) = E^2$. L'ensemble E^2 a donc 2 orbites lorsque $n \geq 2$.