UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Corrigé de l'examen terminal du 3 septembre 2001

1. Soient $a, b \in G$. Comme $a^3b^3 = (ab)^3$, $a^2b^2 = baba = (ba)^2$. Comme $a^5b^5 = (ab)^5$, $a^4b^4 = b(ab)^3a = (ba)^4 = ((ba)^2)^2 = (a^2b^2)^2 = a^2b^2a^2b^2$. D'où $a^2b^2 = b^2a^2$. Donc $(ba)^2 = b^2a^2$. D'après l'exo I.2.c, G est abélien **(1 pt)**.

2.
a. Soit S l'ensemble des cubes de G. Comme le conjugué d'un cube est encore un cube, $ySy^{-1} \subseteq S$ quel que soit $y \in G$. D'où $yHy^{-1} = y\langle S\rangle y^{-1} \subseteq \langle ySy^{-1}\rangle \subseteq \langle S\rangle = H$ quel que soit $y \in G$. Cela montre que H est un sous-groupe distingué de G **(1 pt)**.

b. Soit G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux 1. Le groupe G n'est pas abélien mais tout élément $a \in G$ satisfait $a^3 = e$ (voir l'exo I.2.d). D'où H est trivial et $G/H \cong G$ n'est pas abélien **(1 pt)**.

3. Soit G un groupe d'ordre $1225 = 5^2 \times 7^2$. D'après Sylow, le nombre de 5-sylow sous-groupes de G est égal à 1, 7 ou 7^2. De plus, ce nombre est $\equiv 1 \pmod 5$. Comme $7 \equiv 2 \pmod 5$ et $7^2 \equiv 4 \pmod 5$, G ne contient qu'un seul 5-sylow sous-groupe. De même, G ne contient qu'un seul 7-sylow sous-groupe **(1 pt)**. Soit donc H le 5-sylow et K le 7-sylow sous-groupe de G. Comme ils sont uniques, ils sont distinguées. D'après l'exo III.22, G est isomorphe à $H \times K$ **(1 pt)**. D'après l'exo II.60, H est isomorphe à $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ ou $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$. De même, K est isomorphe à $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ ou $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ **(1 pt)**. D'où G est isomorphe à l'un des groupes suivants:

$$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2, (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/49\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2, \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/49\mathbb{Z}.$$

Comme ces groupes d'ordre 1225 sont clairement non isomorphes deux-à-deux, le nombre de groupes d'ordre 1225 à isomorphisme près est égal à 4.

4. Soit X l'ensemble des 2-sylow sous-groupes de M_{11}. Le groupe M_{11} agit à gauche sur X par conjugaison. Cette action induit un morphisme f de M_{11} dans le groupe symétrique $S(X)$ de X **(1 pt)**. Comme M_{11} est simple, le cardinal n de X est au moins 2. Comme deux 2-sylow de M_{11} sont conjugués, f n'est pas trivial. Comme M_{11} est simple, f est injectif **(1 pt)**. En particulier, l'ordre de M_{11} divise l'ordre de $S(X)$. D'où, les diviseurs premiers $2, 3, 5, 11$ divisent $n!$. Donc $n \geq 11$ **(1 pt)**.

5. a. Montrons que le cardinal de HH' est égal à $\frac{ss'}{s''}$. Soit

$$f\colon H \times H' \longrightarrow G$$

l'application définie par $f(x,x') = xx'$ quel que soit $(x,x') \in H \times H'$. Soit H'' le sous-groupe $H \cap H'$ de G. Faire agir H'' à droite sur $H \times H'$ par $(x,x') \cdot h = (xh, h^{-1}x')$ quels que soient $(x,x') \in H \times H'$ et $h \in H''$. Il est clair que $f(x,x') = f(y,y')$ si et seulement si (x,x') et (y,y') appartiennent à la même orbite pour l'action de H'' sur $H \times H'$. Par conséquent, f induit une bijection de $(H \times H')/H''$ sur $f(H \times H') = HH'$. En particulier, le cardinal de HH' est égal au cardinal de $(H \times H')/H''$. Comme H'' agit librement sur $H \times H'$, ce dernier cardinal est égal à $\frac{ss'}{s''}$ **(2 pt)**.

b. Soient $G = S_3$, $H = \{\mathrm{id}, (1,2)\}$ et $H' = \{\mathrm{id}, (1,3)\}$. D'après le a, le cardinal de HH' est égal à 4. Comme 4 ne divise pas l'ordre de S_3, HH' n'est pas un sous-groupe de G **(1 pt)**.

6. a. L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe. D'où I est un sous-groupe de G **(1 pt)**. Montrons que I est distingué. Soient $x \in I$ et $y \in G$. Soit H un p-sylow sous-groupe de G. Il est clair que $y^{-1}Hy$ est également un p-sylow sous-groupe de G. Comme $x \in I$, $x \in y^{-1}Hy$. D'où $yxy^{-1} \in H$. cela montre que yxy^{-1} appartient à tout p-sylow sous-groupe de G, i.e., $yxy^{-1} \in I$. Par conséquent, I est distingué **(1 pt)**.

b. Soit $\pi\colon G \to G/I$ le morphisme de passage au quotient. Soit $x \in G$ tel que $\pi(x)$ appartient à l'intersection de tous les p-sylow de G/I. On doit montrer que $x \in I$. Soit H un p-sylow sous-groupe de G. Il est facile de voir que $\pi(H)$ est un p-sylow sous-groupe de G/I. Donc $\pi(x) \in \pi(H)$. D'où $x \in \pi^{-1}(\pi(H))$. Comme $I \subseteq H$, on a $\pi^{-1}(\pi(H)) = H$. Par conséquent, $x \in H$. Cela montre que $x \in I$ **(2 pt)**.

7. a. Soient $(g',h), (g,h') \in G \times H$. Par définition du produit semi-direct, $(g',h) \cdot (g,h') = (g'\alpha(h)(g), hh')$. Donc

$$\begin{aligned}\varphi((g',h)\cdot(g,h')) &= (f(g'\alpha(h)(g)), k(hh')) = \\ &= (f(g')f(\alpha(h)(g)), k(h)k(h')).\end{aligned}$$

De l'autre coté,

$$\begin{aligned}\varphi(g',h)\cdot\varphi(g,h') &= (f(g'), k(h)) \cdot (f(g), k(h')) = \\ &= (f(g')\alpha'(k(h))(f(g)), k(h)k(h')).\end{aligned}$$

Par conséquent, φ est un morphisme de $G \rtimes_{\alpha} H$ dans $G' \rtimes_{\alpha'} H'$ si et seulement si $f(\alpha(h)(g)) = \alpha'(k(h))(f(g))$ quels que soient $g \in G$ et $h \in H$ **(1 pt)**.

b. Ensemblistement, $\ker(\varphi) = \ker(f) \times \ker(k)$. Pour $h \in \ker(k)$, l'automorphisme $\alpha(h)$ de G satisfait $\alpha(h)(\ker(f)) \subseteq \ker(f)$, d'après le a. Par conséquent, la restriction $\alpha(h)|_{\ker(f)}$ de $\alpha(h)$ à $\ker(f)$ est un automorphisme de $\ker(f)$. Définir

$$\beta\colon \ker(k) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\ker(f))$$

par $\beta(h) = \alpha(h)|_{\ker(f)}$. Il est clair que β est un morphisme et que $\ker(\varphi) = \ker(f) \rtimes_{\beta} \ker(k)$ en tant que groupes **(1 pt)**.

c. Lorsque $\ker(k) \subseteq \ker(\alpha)$, β est le morphisme trivial. D'où, la loi de groupe du produit semi-direct de $\ker(f) \rtimes_{\beta} \ker(k)$ est égale à celle du produit direct $\ker(f) \times \ker(k)$ **(0,5 pt)**.

d. Ensemblistement, $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{im}(f) \times \mathrm{im}(k)$. Pour $h' \in \mathrm{im}(k)$, l'automorphisme $\alpha'(h')$ de G satisfait $\alpha(h')(\mathrm{im}(f)) \subseteq \mathrm{im}(f)$, d'après le a. Par conséquent, la restriction $\alpha'(h')|_{\mathrm{im}(f)}$ de $\alpha'(h')$ à $\mathrm{im}(f)$ est un automorphisme de $\mathrm{im}(f)$. Définir

$$\beta'\colon \mathrm{im}(k) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{im}(f))$$

par $\beta'(h') = \alpha'(h')|_{\mathrm{im}(f)}$. Il est clair que β' est un morphisme et que $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{im}(f) \rtimes_{\beta'} \mathrm{im}(k)$ en tant que groupes **(1 pt)**.

e. Lorsque $\mathrm{im}(k) \subseteq \ker(\alpha')$, β' est le morphisme trivial. D'où, la loi de groupe du produit semi-direct de $\mathrm{im}(f) \rtimes_{\beta'} \mathrm{im}(k)$ est égale à celle du produit direct $\mathrm{im}(f) \times \mathrm{im}(k)$ **(0,5 pt)**.