Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Examen terminal, le 20 juin 2018, 8h30-11h30

Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soit $\sigma \in S_{12}$ la permutation définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 3 & 9 & 1 & 11 & 4 & 12 & 8 & 10 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer la décomposition en cycles disjoints de σ.

b. En déduire la signature de σ.

c. En déduire encore l'ordre de σ.

Soit τ une permutation cyclique de longueur 12 dans S_{12}.

d. Montrer que τ^n est encore une permutation cyclique de longueur 12, si n est un entier premier avec 12.

e. En déduire que $\sigma \neq \tau^n$ quel que soit l'entier n.

Exercice 2. Rappelons que le centre d'un groupe G est le sous-groupe distingué $Z(G)$ de G défini par

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G\colon gh = hg\}.$$

a. Montrer que $Z(S_4) = \{\mathrm{id}\}$.

b. Montrer que $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$ quels que soient les groupes G et H.

c. Montrer que $Z(D_{24}) = \{e, r^{12}\}$. (Rappelons que le goupe diédral D_{24} est le groupe d'éléments $e, r, r^2, \ldots, r^{23}, s, rs, r^2s, \ldots, r^{23}s$, où $r^{24} = e$, $s^2 = e$ et $sr = r^{-1}s$.)

Soit $f\colon G \to H$ un morphisme de groupes, où G et H sont des groupes quelconques.

d. Montrer par un exemple qu'on n'a pas nécessairement $f(Z(G)) \subseteq Z(H)$. (Indication : prendre G un sous-groupe d'un groupe H, tous les deux judicieusement choisis, et f le morphisme d'inclusion de G dans H.)

e. Montrer que $f(Z(G)) \subseteq Z(H)$ si f est surjectif.

f. En déduire que $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3))$ est égal au sous-groupe distingué $\{\pm I\}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, où I est la matrice identité 2×2. (Indication : prendre pour f le morphisme du passage au quotient de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)/\{\pm I\}$ et utiliser que ce dernier groupe est isomorphe à S_4 ; cf. le contrôle continu numéro 3.)

Dans la suite on suppose que f est un isomorphisme, et, en particulier, que G et H sont isomorphes.

g. Montrer que $f(Z(G)) = Z(H)$.

h. En déduire que les groupes $Z(G)$ et $Z(H)$ sont isomorphes.

i. En déduire que les groupes S_4 et $Q_8 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.

Soient $\pi\colon G \to G/Z(G)$ et $\rho\colon H \to H/Z(H)$ les morphismes de passage au quotient.

j. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes

$$\bar{f}\colon G/Z(G) \to H/Z(H)$$

tel que $\bar{f}\circ\pi = \rho\circ f$. (Indication : appliquer la propriété universelle du quotient au morphisme $\rho \circ f$.)

k. Montrer que $\bar{f}$ est un isomorphisme.

l. En déduire que les groupes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ et D_{24} ne sont pas isomorphes. (On pourra admettre que le groupe quotient $D_{24}/Z(D_{24})$ est isomorphe à D_{12}.)

Exercice 3. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})^\times$ de l'anneau $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ est cyclique en cherchant un générateur.

a. Déterminer l'ordre du groupe $(\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})^\times$.

b. Supposons que $\bar{x} \in (\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})^\times$ est un générateur ; montrer que la classe $\tilde{x}$ de x modulo 7 est un générateur de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$.

c. Déterminer un générateur de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$.

d. Déterminer un générateur de $(\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})^\times$.

Barème sur 20 points :

Exercice 1	5 pts
Exercice 2	11 pts
Exercice 3	4 pts