Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Examen terminal, le 14 mai 2019, 15h45-18h45

Documents et calculatrices interdits. Justifier les réponses.

Exercice 1. Soit S^1 le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$ de $\mathbb{C}$ des nombres complexes de module 1.

a. Soit n un entier naturel non nul, soit $g = e^{\frac{2i\pi}{n}} \in S^1$, et soit H un sous-groupe de S^1 d'ordre n.
   (i) Montrer que le sous-groupe $\langle g \rangle$ de S^1 engendré par g est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (ii) Montrer que le sous-ensemble H de $\mathbb{C}$ est contenu dans l'ensemble des racines du polyôme $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$.
   (iii) En déduire que $H = \langle g \rangle$.
   (iv) Déterminer les générateurs de H.

b. Soit $g \in S^1$ d'ordre m, et soit $h \in S^1$ d'ordre n. Soit $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$, et soit $j = e^{\frac{2i\pi}{d}} \in S^1$.
   (i) Montrer que $j \in \langle g \rangle \cap \langle h \rangle$.
   (ii) Montrer que l'ordre de $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle$ divise d. (Indication : utiliser le Théorème de Lagrange)
   (iii) En déduire que j est un générateur de $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle$.
   (iv) Montrer que $\langle g, h \rangle$ est un sous-groupe de S^1 d'ordre $\frac{mn}{d}$. (Indication : utiliser le deuxième Théorème d'isomorphisme).
   (v) En déduire que l'ordre o de gh est un diviseur du $\mathrm{ppcm}(m, n)$.
   (vi) Donner un exemple où $o \neq \mathrm{ppcm}(m, n)$.
   (vii) Montrer que $o = \mathrm{ppcm}(m, n)$ lorsque $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$.

c. Donner un élément de S^1 d'ordre infini.

Exercice 2. Soit $S \subseteq S_5$ le sous-ensemble des permutations cycliques d'ordre 4. Le but de cet exercice est de montrer que S engendre S_5.

a. Calculer $(1\ 2\ 3\ 5)^{-1}(1\ 2\ 3\ 4)$.
b. En déduire que toute permutation cyclique d'ordre 3 dans S_5 appartient à $\langle S \rangle$.
c. Calculer $(1\ 2\ 3)^{-1}(1\ 2\ 3\ 4)$.
d. En déduire que toute transposition dans S_5 appartient à $\langle S \rangle$.
e. En déduire que $\langle S \rangle = S_5$.
f. Ecrire la transposition $(1\ 2)$ comme un produit de permutations cycliques d'ordre 4 dans S_5.

g. Expliquer pourquoi il faut un nombre impair de permutations cycliques d'ordre 4 pour une telle écriture.

Exercice 3. Soit G un groupe et H un sous-groupe. Définissons le sous-ensemble N de G par
$$N = \{g \in G \mid gH = Hg\}.$$

a. Montrer que N est un sous-groupe de G.

b. Montrer que le groupe N contient H comme sous-groupe.

c. Montrer que H est distingué dans N.

d. Montrer que N est le plus grand sous-groupe de G contenant H dans lequel H est distingué [1].

e. Soit K un sous-groupe de N contenant H. Montrer que H est un sous-groupe distingué de K.

Exercice 4. Soit σ et τ les permutations dans S_5 définies par
$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5) \quad \text{et} \quad \tau = (2\,3\,5\,4).$$

Soit $K = \langle \sigma, \tau \rangle$ le sous-groupe de S_5 engendré par σ et τ, et soit $H = \langle \sigma \rangle$ le sous-groupe de K engendré par σ.

a. Déterminer l'ordre de H.

b. Montrer que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$.

c. En déduire que H est distingué dans K. (Indication : on pourra se servir de l'exercice 3 ci-dessus.)

d. Montrer que le groupe quotient K/H est cyclique d'ordre 4 engendré par $\bar{\tau} = \tau H$.

e. En déduire l'ordre de K.

Barème sur 20 points :

Exercice 1	7 pts
Exercice 2	6 pts
Exercice 3	2,5 pts
Exercice 4	4,5 pts

1. On appelle N le *normalisateur* de H dans G