Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 2 mai 2019, 13h30-14h00

CORRIGE ET BAREME

Exercice 1. a. Pour montrer que A est d'ordre 8, il suffit de montrer que $A^8 = I$ et que $A^4 \neq I$. Or,

$$A^4 = (A^2)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

D'où $A^4 \neq I$ et $A^8 = (-I)^2 = I$. **(1 pt)**

b. Comme $H = \{\pm I\}$ et $(-I)^2 = I$, on a $H = \langle -I \rangle$ et c'est donc un sous-groupe de G. **(1 pt)**

c. Comme $\pm I$ commutent avec tout élément de G, on a $xHx^{-1} = xx^{-1}H = H$ quels que soient $x \in G$. Le sous-groupe H est donc distingué dans G. **(1 pt)**

d. D'après le cours,

$$|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)| = (9-1) \times (9-3) = 48.$$

Du coup, $|G/H| = |G|/|H| = 48/2 = 24$. **(1 pt)**

e. On a $A^4 = -I \in H$, et donc $\bar{A}^4 = \bar{I}$ dans G/H. Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin H,$$

on a $\bar{A}^2 \neq \bar{I}$. Il suit que $\bar{A}$ est d'ordre 4 dans G/H. **(1 pt)**

f. Comme

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

On a

$$AL_1 = L_2,\ AL_2 = L_3,\ AL_3 = L_4,\ AL_4 = L_1,$$

et donc $\sigma_A = (1\,2\,3\,4)$.

Comme

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

On a

$$BL_1 = L_2,\ BL_2 = L_1,\ BL_3 = L_3,\ BL_4 = L_4,$$

et donc $\sigma_B = (1\,2)$. **(1 pt)**

g. Comme $(-I)L_i = -L_i = L_i$ quel que soit $i = 1, 2, 3, 4$, on a $\sigma_{-I} = \mathrm{id}$, c-à-d, $-I \in \ker(\sigma)$. Comme $H = \langle -I \rangle$, on a donc $H \subseteq \ker(\sigma)$. D'après le f, $(1\,2\,3\,4), (1\,2) \in \mathrm{im}(\sigma)$. D'après le cours, ces deux éléments engendrent S_4. Le morphisme σ est donc surjectif. Il suit de la version groupale du Théorème du rang que $|\ker(\sigma)| = |G|/|S_4| = 48/24 = 2$. Comme $H \subseteq \ker(\sigma)$ et $|H| = 2 = |\ker(\sigma)|$, on a $H = \ker(\sigma)$. **(1 pt)**

h. D'après le premier Théorème d'isomorphisme, $\bar{\sigma}$ est un isomorphisme de G/H sur son image qui est égale à $\mathrm{im}(\sigma) = S_4$ d'après ce qu'on a vu au g. **(1 pt)**

i. Comme $\bar{\sigma}(\bar{A}) = \sigma_A = (1\,2\,3\,4)$ et $\bar{\sigma}(\bar{B}) = \sigma_B = (1\,2)$, les éléments $\bar{\sigma}(\bar{A})$ et $\bar{\sigma}(\bar{B})$ engendrent S_4. Comme $\bar{\sigma}^{-1}$ est surjectif, les éléments $\bar{\sigma}^{-1}(\bar{\sigma}(\bar{A})) = \bar{A}$ et $\bar{\sigma}^{-1}(\bar{\sigma}(\bar{B})) = \bar{B}$ engendrent $\mathrm{im}(\bar{\sigma}^{-1}) = G/H$. **(1 pt)**

j. On a vu ci-dessus que $A^4 = -I$. Il suit que $\langle A, B \rangle \supseteq H$. D'après la version groupale du Théorème du rang appliquée à la restriction σ' de σ au sous-groupe $\langle A, B \rangle$, on a

$$|\langle A, B \rangle| = |\ker(\sigma')| \times |\mathrm{im}(\sigma')| = |\ker(\sigma)| \times |S_4| = 2 \times 24 = 48 = |G|,$$

car $H = \ker(\sigma) \subseteq \langle A, B \rangle$ et $\sigma'(A) = \sigma_A$ et $\sigma'(B) = \sigma_B$ engendrent S_4. Il suit que $\langle A, B \rangle = G$. **(1 pt)**