Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 28 mars 2019, 10h15-10h45

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. On a $\sigma(1) = 6$, $\sigma(6) = 3$, $\sigma(3) = 8$ et $\sigma(8) = 1$, ce qui fait le cycle $(1\,6\,3\,8)$. On a $\sigma(2) = 11$, $\sigma(11) = 12$, $\sigma(12) = 4$, $\sigma(4) = 10$ et $\sigma(10) = 2$, ce qui fait le cycle $(2\,11\,12\,4\,10)$. On a encore $\sigma(5) = 7$, $\sigma(7) = 9$ et $\sigma(9) = 5$, ce qui fait le cycle $(5\,7\,9)$. On a épuisé tous les éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, 12\}$, et on a donc

$$\sigma = (1\,6\,3\,8)(2\,11\,12\,4\,10)(5\,7\,9). \quad \textbf{(1 pt)}$$

b. L'ordre de σ est $\mathrm{ppcm}(4, 5, 3) = 60$. **(1 pt)**

c. Comme la signature d'une permutation cyclique de longueur ℓ est égale à $(-1)^{\ell+1}$, la signature de σ est égale à $(-1)^{4+1}(-1)^{5+1}(-1)^{3+1} = -1$. **(1 pt)**

d. Non, si $\tau^2 = \sigma$, on aurait $\varepsilon(\tau)^2 = \varepsilon(\tau^2) = \varepsilon(\sigma) = -1$ ce qui est impossible car $(-1)^2 = 1$ et $1^2 = 1$. **(1 pt)**

e. Non, supposons qu'une telle permutation τ existe. Montrons d'abord que τ est d'ordre 180. En effet, soit n l'ordre de τ. D'après le cours, l'ordre de $\sigma = \tau^3$ est égal à $n/\mathrm{pgcd}(3, n)$. Comme l'ordre de σ est égal à 60, on a donc

$$n = 60 \times \mathrm{pgcd}(3, n).$$

En particulier, n est un multiple de 60, et est donc divisible par 3. Du coup, $\mathrm{pgcd}(3, n) = 3$. Cela montre que τ est d'ordre 180. **(1 pt)**

Soit $\tau = \tau_1 \ldots \tau_k$ la décomposition en cycles disjoints de τ. Soit ℓ_i la longueur de la permutation cyclique τ_i. Comme $\mathrm{ppcm}(\ell_1, \ldots, \ell_k) = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, il y a un cycle τ_i de τ dont la longueur ℓ_i est un multiple de $3^2 = 9$. Comme $\ell_i \leq 12$, on a $\ell_i = 9$. De même, il y a un cycle τ_j de τ dont la longueur ℓ_j est un multiple de 5. Comme $\ell_i = 9$ n'est pas un multiple de 5, on a $j \neq i$. Du coup, τ_i et τ_j ont supports disjoints. Comme $\tau \in S_{12}$, on a

$$12 \geq |\mathrm{Supp}(\tau)| \geq |\mathrm{Supp}(\tau_i)| + |\mathrm{Supp}(\tau_j)| \geq 9 + 5 = 14.$$

Contradiction. **(1 pt)**

Exercice 2. Supposons que $\sigma \in S_n$ a ordre 2019. Soit $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ sa décomposition en cycles disjoints. Soit ℓ_i la longueur de σ_i. L'ordre de σ est égal à $\mathrm{ppcm}(\ell_1, \ldots, \ell_k)$. Comme cet ordre est égal à $2019 = 3 \times 673$, il y a un cycle σ_i de σ de longueur un multiple de 3, et il y a un cycle σ_j de σ de longueur un multiple de 673. Si $i = j$, le cycle σ_i est de longueur un multiple de $3 \times 673 = 2019$, car 3 et 673 sont premiers entre eux, et on a donc $n \geq 2019$. Si $i \neq j$, les cycles σ_i et σ_j sont à supports disjoints, et donc $n \geq 3 + 673 = 676$. Dans les deux cas, on a $n \geq 676$.

Le groupe symétrique S_{676} contient effectivement une permutation d'ordre 2019 :

$$(1\,2\,3\,\cdots\,673)(674\,675\,676).$$

L'entier n recherché est donc $n = 676$. **(1 pt)**

Exercice 3. a. Faux : les transpositions $(1\,2)$ et $(1\,3)$ dans S_{36} ne commutent pas. **(1 pt)**

b. Faux : les permutations cycliques $(1\,2\,3\,4)$ et $(1\,2\,4\,3)$ dans S_{36} ne commutent pas. **(1 pt)**

c. Faux : si $\ell = 36$, l'énoncé dirait que tout élément de S_{36} était une permutation cyclique de longueur ℓ, ce qui est absurde car l'identité dans S_{36} n'en est pas une. **(1 pt)**