Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 28 mars 2019, 10h15-10h45

Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soit σ la permutation dans le groupe symétrique S_{12} définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 11 & 8 & 10 & 7 & 3 & 9 & 1 & 5 & 2 & 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Décomposer σ en cycles disjoints.

b. Quel est l'ordre de σ ?

c. Quelle est la signature de σ ?

d. Existe-t-il une permutation $\tau \in S_{12}$ telle que $\tau^2 = \sigma$? Si oui, en déterminer une. Si non, montrer qu'il n'y en a pas.

e. Existe-t-il une permutation $\tau \in S_{12}$ telle que $\tau^3 = \sigma$? Si oui, en déterminer une. Si non, montrer qu'il n'y en a pas.

Exercice 2. En sachant que la décomposition en facteurs premiers de 2019 et 3×673, quel est le plus petit entier naturel n tel que le groupe symétrique S_n contient un élément d'ordre 2019 ?

Exercice 3. Vrai ou faux ? Si c'est vrai, donner une démonstration. Si c'est faux, donner un contre-exemple.

a. Deux permutations cycliques dans S_{36} de la même longueur commutent.

b. Deux permutations cycliques dans S_{36} de la même longueur et de même support commutent.

c. Soit ℓ un entier naturel avec $2 \leq \ell \leq 36$. Le nombre de permutations cycliques de longueur ℓ dans S_{36} est égal à $\frac{36!}{(36-\ell)!}$.