

Université de Bretagne Occidentale  
UFR Sciences et Techniques  
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 14 mars 2019, 10h15-10h45

Documents et calculatrices interdits.

**Exercice 1.** Soit  $\sigma$  et  $\tau$  les permutations dans le groupe symétrique  $S_7$  définies par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer l'ordre de  $\sigma$ .
- Enumérer les éléments du sous-groupe  $\langle \sigma \rangle$  de  $S_7$  sans répétition.
- Vérifier que  $\tau\sigma^3 = \sigma^{-3}\tau$ .
- Vérifier que  $\tau$  et  $\sigma^4$  commutent.
- Déduire des questions c et d que  $\tau\sigma^{3m+4n} = \sigma^{-3m+4n}\tau$  quels que soient  $m, n \in \mathbb{Z}$ .
- En déduire que tout élément du sous-groupe  $\langle \sigma, \tau \rangle$  de  $S_7$  s'écrit sous la forme  $\sigma^i\tau^j$  avec  $i, j \in \mathbb{Z}$ .
- La permutation  $\tau$  appartient-elle à  $\langle \sigma \rangle$  ?
- Déterminer l'ordre de  $\langle \sigma, \tau \rangle$ .