Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Examen terminal, 13 juin 2018, 13h30-16h30

Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soit $D = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = D \times D \times D$. Faisons agir le groupe symétrique S_4 sur l'ensemble E par

$$\sigma \cdot (i, j, k) = (\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)).$$

a. Vérifier que cette loi de composition externe définit bien une action de S_4 sur E.

b. Montrer que le stabilisateur de l'élément $(2, 3, 4)$ de E est trivial.

c. En déduire le cardinal de l'orbite $S_4(2, 3, 4)$.

d. Déterminer l'orbite $S_4(4, 4, 4)$.

e. Montrer que le complémentaire de $S_4(2, 3, 4) \cup S_4(4, 4, 4)$ dans E est réunion de 3 orbites distinctes.

f. Dire pourquoi ces 3 orbites ont même cardinal sans les déterminer.

g. Déterminer le cardinal de ces 3 orbites à l'aide de la formule aux classes.

Exercice 2. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Soit

$$N = \{g \in G \,|\, gHg^{-1} = H\}.$$

a. Montrer que N est un sous-groupe de G.

b. Montrer que N contient H.

c. Montrer que H est un sous-groupe distingué de N.

Soit K un sous-groupe de G contenant H. Soit $f \colon G/H \to G/K$ l'application ensembliste définie par $f(xH) = xK$.

d. Montrer que f est bien définie.

e. Montrer que f est surjective.

Soit $\pi \colon G \to G/H$ l'application de passage au quotient.

f. Montrer qu'il existe une action à droite $\odot$ de K sur G/H telle que $\pi(xk) = xH \odot k$ quels que soient $x \in G$ et $k \in K$ si et seulement si $K \subseteq N$.

Exercice 3. Soit n un entier naturel ≥ 3. Soit D_n le n-ième groupe diédral. Rappelons que

$$D_n = \{r^k, r^k s \,|\, k = 0, \ldots, n-1\}$$

où r est la rotation de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}^2$ définie par $r(z) = e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot z$, et s est la symétrie définie par $s(z) = \overline{z}$.

a. Montrer que l'élément r^k de D_n est d'ordre $\frac{n}{(k,n)}$ pour $k = 0, \ldots, n-1$, où (k, n) désigne le pgcd de k et n

b. Montrer que tous les éléments du complémentaire $D_n \setminus \langle r \rangle$ du sous-groupe engendré $\langle r \rangle$ de D_n sont d'ordre 2.

c. Montrer qu'une classe de conjugaison de D_n est soit contenue dans $\langle r \rangle$ soit contenue dans son complémentaire $D_n \setminus \langle r \rangle$. (Indication : le sous-groupe $\langle r \rangle$ est un sous-groupe distingué de D_n.)

d. Montrer que r^k et r^ℓ sont conjugués dans D_n si et seulement si $k \pm \ell \equiv 0 \pmod{n}$, pour $k, \ell = 0, \ldots, n-1$.

e. Montrer que le nombre de classes de conjugaison de D_n contenues dans $\langle r \rangle$ est égal à $\frac{1}{2}(n+1)$ lorsque n est impair.

f. Montrer que le nombre de classes de conjugaison de D_n contenues dans $\langle r \rangle$ est égal à $\frac{1}{2}(n+2)$ lorsque n est pair.

g. Montrer que le complémentaire $D_n \setminus \langle r \rangle$ est une classe de conjugaison lorsque n est impair.

h. Montrer que le complémentaire $D_n \setminus \langle r \rangle$ est une réunion de deux classes de conjugaison distinctes lorsque n est pair.

i. Montrer que le centre de D_n est trivial lorsque n est impair.

j. Montrer que le centre de D_n contient deux éléments lorsque n est pair.

k. Montrer que tout sous-groupe de $\langle r \rangle$ est un sous-groupe distingué de D_n.

l. Montrer que tout sous-groupe distingué non trivial de D_n est un sous-groupe de $\langle r \rangle$ lorsque n est impair.

m. Montrer que D_n contient deux sous-groupes distingués non triviaux en non contenus dans $\langle r \rangle$ lorsque n est pair.

Barème sur 20 points :

Exercice 1	6 pts
Exercice 2	4 pts
Exercice 3	10 pts