Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Examen terminal, le 9 mai 2018, 8h00-11h00

Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. a. **(0,5 pt)** Les types des éléments de S_4 sont : (4), (3), $(2,2)$, (2) et (). Comme les permutations de type (4) et (2) sont impaires, et celles de type (3), $(2,2)$ et () sont paires, les types de permutations de A_4 sont (3), $(2,2)$ et ().

b. **(0,5 pt)** Les permutations de type (3) sont d'ordre 3 ; celles de type $(2,2)$ sont d'ordre 2, et celle de type () est d'ordre 1.

c. **(0,5 pt)** On a

$$(1\,2\,3)\cdot(1\,2)(3\,4)\cdot(1\,2\,3)^{-1}=(1\,4)(2\,3).$$

d. **(1 pt)** D'après le c, l'élément τ n'est pas point fixe pour l'action par conjugaison du sous-groupe $H=\langle(1\,2\,3)\rangle$ sur A_4. Le stabilisateur H_τ est donc un sous-groupe strict du groupe H. Comme H est d'ordre 3, nombre premier, le stabilisateur H_τ de τ est trivial. Du coup,

$$|H\star\tau|=\frac{|H|}{|H_\tau|}=\frac{3}{1}=3.$$

Comme $A_4\star\tau$ contient $H\star\tau$, on a

$$|A_4\star\tau|\geq|H\star\tau|=3.$$

e. **(1 pt)** Soit O_2 l'ensemble des éléments de A_4 d'ordre 2. Comme le conjugué d'un élément d'ordre 2 est d'ordre 2, on a $A_4\star\tau\subseteq O_2$. D'après le d, $|A_4\star\tau|\geq 3$. Par ailleurs,

$$O_2=\{(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3)\}$$

ne contient que 3 éléments. Il s'ensuit que $A_4\star\tau=O_2$, et tous les éléments de A_4 d'ordre 2 sont conjugués de τ dans A_4. Ce qui implique qu'ils sont tous conjugués dans A_4.

f. **(0,5 pt)** On a bien $\sigma\star\sigma=\sigma\cdot\sigma\cdot\sigma^{-1}=\sigma$. Donc $\sigma\in(A_4)_\sigma$.

g. **(0,5 pt)** D'après le f, le sous-groupe engendré $\langle\sigma\rangle$ de A_4 est contenu dans $(A_4)_\sigma$. Comme $\langle\sigma\rangle$ est d'ordre 3, l'ordre de $(A_4)_\sigma$ est au moins 3 et divisible par 3 d'après le Théorème de Lagrange.

h. **(1 pt)** D'après le g, $|(A_4)_\sigma|\geq 3$ et donc

$$|A_4\star\sigma|=\frac{|A_4|}{|(A_4)_\sigma|}\leq\frac{12}{3}=4.$$

Cela veut dire que σ possède au plus 4 conjugués dans A_4.

i. **(0,5 pt)** On a

$$(1\,2\,4)\cdot(1\,2\,3)\cdot(1\,2\,4)^{-1}=(2\,4\,3)$$

j. **(1 pt)** D'après le i, l'élément σ n'est pas point fixe pour l'action du sous-groupe $H = \langle (1\,2\,4) \rangle$ sur A_4 par conjugaison. Le stabilisateur H_σ est donc un sous-groupe strict du groupe H. Comme H est d'ordre 3, nombre premier, le stabilisateur H_σ est trivial. Du coup,

$$|H \star \sigma| = \frac{|H|}{|H_\sigma|} = \frac{3}{1} = 3.$$

Comme $A_4 \star \sigma$ contient $H \star \sigma$, on a

$$|A_4 \star \sigma| \geq |H \star \sigma| = 3.$$

k. **(1 pt)** D'après le j,

$$|(A_4)_\sigma| = \frac{|A_4|}{|A_4 \star \sigma|} \leq \frac{12}{3} = 4$$

Or, d'après le g, $|(A_4)_\sigma|$ est un multiple de 3 supérieur ou égal à 3. Il s'ensuit que $|(A_4)_\sigma| = 3$ et donc que

$$|A_4 \star \sigma| = \frac{|A_4|}{|(A_4)_\sigma|} = \frac{12}{3} = 4$$

ce qui veut dire que σ possède exactement 4 conjugués dans A_4.

l. **(1 pt)** D'après ce qu'on a vu dans le k, $|(A_4)_\sigma| = 3$. On a donc

$$(A_4)_\sigma = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2\}.$$

On détermine les classes à gauche des éléments de A_4 modulo $(A_4)_\sigma$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{id} \cdot (A_4)_\sigma &= \{\mathrm{id}, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\},\\
(1\,2\,4) \cdot (A_4)_\sigma &= \{(1\,2\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,3\,4)\}\\
(1\,4\,2) \cdot (A_4)_\sigma &= \{(1\,4\,2), (2\,3\,4), (1\,3)(2\,4)\}\\
(1\,4\,3) \cdot (A_4)_\sigma &= \{(1\,4\,3), (1\,2)(3\,4), (2\,4\,3)\}
\end{aligned}$$

m. **(1 pt)** D'après le cours, l'application ensembliste

$$f \colon A_4/(A_4)_\sigma \to A_4 \star \sigma$$

définie par $f(\rho(A_4)_\sigma) = \rho \star \sigma$ est une bijection. On a donc

$$A_4 \star \sigma = \{\mathrm{id} \star \sigma, (1\,2\,4) \star \sigma, (1\,4\,2) \star \sigma, (1\,4\,3) \star \sigma\}.$$

Comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{id} \star \sigma &= \sigma = (1\,2\,3),\\
(1\,2\,4) \star \sigma &= (1\,2\,4)(1\,2\,3)(1\,2\,4)^{-1} = (2\,4\,3),\\
(1\,4\,2) \star \sigma &= (1\,4\,2)(1\,2\,3)(1\,4\,2)^{-1} = (1\,3\,4),\\
(1\,4\,3) \star \sigma &= (1\,4\,3)(1\,2\,3)(1\,4\,3)^{-1} = (1\,4\,2),
\end{aligned}$$

les conjugués de σ dans A_4 sont

$$(1\,2\,3),\ (2\,4\,3),\ (1\,3\,4),\ (1\,4\,2).$$

n. **(1 pt)** On sait que A_4 est un sous-groupe distingué de S_4. En particulier, $\alpha(A_4) = A_4$. La restriction β est donc un morphisme de groupe surjectif de A_4 dans lui-même. Comme α est injectif, β l'est également. C'est donc bien un automorphisme de A_4.

o. **(1 pt)** Comme β est un morphisme de groupes, β envoie un conjugué de σ dans A_4 sur un conjugué de $\beta(\sigma) = \sigma'$. De même, le morphisme réciproque β^{-1} envoie un conjugué de σ' sur un conjugué de σ. Cela donne deux applications réciproques l'une de l'autre entre la classe de conjugaison de σ dans A_4 et la classe de conjugaison de σ' dans A_4. En particulier, σ' possède autant de conjugués dans A_4 que σ. Il suit du k que σ' a 4 conjugués dans A_4.

p. **(1 pt)** D'après le m, σ' n'est pas un conjugué de σ dans A_4. Sa classe de conjugaison $A_4 \star \sigma'$ est donc disjointe de celle de σ. Comme elles ont toutes les deux 4 éléments, la réunion $A_4 \star \sigma \cup A_4 \star \sigma'$ possède 8 éléments. Comme tous ces éléments sont d'ordre 3 et A_4 possède exactement 8 éléments d'ordre 3, la réunion $A_4 \star \sigma \cup A_4 \star \sigma'$ est égale l'ensemble O_3 des éléments de A_4 d'ordre 3.

q. **(1 pt)** D'après le b, le groupe A_4 est la réunion disjointe des sous-ensembles O_1, O_2 et O_3 des éléments d'ordre 1, 2 et 3 respectivement. D'après le e, $O_2 = A_4 \star \tau$. D'après le p, O_3 est la réunion disjointe de $A_4 \star \sigma$ et $A_4 \star \sigma'$. L'ensemble O_1 est bien-sûr égal à $\{\mathrm{id}\}$, la classe de conjugaison de l'élément neutre de A_4. Il s'ensuit que les classes de conjugaison de A_4 sont

$$A_4 \star \{\mathrm{id}\},\ A_4 \star \tau,\ A_4 \star \sigma,\ A_4 \star \sigma'$$

de cardinal 1, 3, 4, 4 respectivement.

r. **(1 pt)** D'après le q, les réunions non triviales des classes de conjugaison de A_4 contenant l'élément neutre sont

$$A_4 \star \mathrm{id} \cup A_4 \star \tau,\ A_4 \star \mathrm{id} \cup A_4 \star \sigma,\ A_4 \star \mathrm{id} \cup A_4 \star \sigma',\ A_4 \star \mathrm{id} \cup A_4 \star \tau \cup A_4 \star \sigma,$$
$$A_4 \star \mathrm{id} \cup A_4 \star \tau \cup A_4 \star \sigma',\ A_4 \star \mathrm{id} \cup A_4 \star \sigma \cup A_4 \star \sigma',$$

de cardinal 4, 5, 5, 8, 8, 9 respectivement. Si une telle réunion est un sous-groupe, son cardinal doit diviser $|A_4| = 12$. Le seul sous-groupe distingué non trivial de A_4 est donc $A_4 \star \mathrm{id} \cup A_4 \star \tau$, le sous-groupe de A_4 “des doubles transpositions”.

Exercice 2. a. Montrons d'abord l'inclusion $\subseteq$ **(1 pt)** : soit $g \in Z(G)$ et montrons que $\alpha(g) \in Z(G)$. Soit $h \in G$ quelconque. Comme α est surjectif, il existe $k \in G$ tel que $\alpha(k) = h$. Du coup,

$$\alpha(g)h = \alpha(g)\alpha(k) = \alpha(gk) = \alpha(kg) = \alpha(k)\alpha(g) = h\alpha(g)$$

car $g \in Z(G)$. D'où $\alpha(g) \in Z(G)$.

Montrons ensuite l'inclusion $\supseteq$ **(1 pt)** : soit $g \in Z(G)$. Comme α est surjectif, il existe $h \in G$ tel que $\alpha(h) = g$. On montre que $h \in Z(G)$. Soit $k \in G$ quelconque. Comme $g \in Z(G)$, on a $g\alpha(k) = \alpha(k)g$, c-à-d, $\alpha(h)\alpha(k) = \alpha(k)\alpha(h)$, ou encore

$\alpha(hk) = \alpha(kh)$. Du coup, on a $\alpha(hk(kh)^{-1}) = \alpha(hk)\alpha(kh)^{-1} = e$ dans G. Comme α est injectif, on en déduit que $hk(kh)^{-1} = e$ dans G, c-à-d, $hk = kh$. Par conséquent, $h \in Z(G)$.

b. **(1 pt)** D'après le a, $\alpha(Z(G)) \subseteq Z(G)$. On a donc $\pi \circ \alpha(Z(G)) = \{\bar{e}\}$ dans $G/Z(G)$. D'après la propriété universelle du quotient, il existe donc un unique morphisme $\bar{\alpha} \colon G/Z(G) \to Z/Z(G)$ tel que $\bar{\alpha} \circ \pi = \pi \circ \alpha$.

c. Comme π et α sont surjectifs, $\pi \circ \alpha$ l'est. D'après le cours, le morphisme induit $\bar{\alpha}$ l'est également **(1 pt)**.

Quant à l'injectivité de $\bar{\alpha}$, d'après le cours, le noyau $\ker(\bar{\alpha})$ est égal à $\ker(\pi \circ \alpha)/Z(G)$. Or,

$$\ker(\pi \circ \alpha) = (\pi \circ \alpha)^{-1}(e) = \alpha^{-1}(\pi^{-1}(e)) = \alpha^{-1}(Z(G)) = Z(G)$$

d'après le a et d'après le fait que α est injectif. Il s'ensuit que $\ker(\bar{\alpha}) = \{\bar{e}\}$ et $\bar{\alpha}$ est injectif **(1 pt)**.