Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 17 avril février 2018, 8h00-8h30

CORRIGE

Exercice 1. a. L'élément neutre de G, i.e. la matrice identité I_2, appartient bien à H. Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c+d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quels que soient $c, d \in \mathbb{R}$, le sous-ensemble H de G est bien stable pour la multiplication. Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a bien $h^{-1} \in H$ quel que soit $h \in H$. Par conséquent, H est un sous-groupe de G [1].

b. On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} a & ac+b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -ab+a^2c+ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^2c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

quel que soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Cela montre que $gHg^{-1} \subseteq H$ quel que soit $g \in G$. Le sous-groupe H de G est donc distingué.

c. Le produit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ac+b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale si et seulement si $ac + b = 0$, c-à-d, $c = -a^{-1}b$. Il s'ensuit que la classe à gauche $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) H$ contient une et une seule matrice diagonale à savoir $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$.

d. D'après le c, l'application ensembliste

$$f \colon \mathbb{R}^\star \to G/H$$

définie par

$$f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} H$$

1. Un autre argument consiste à dire que H est un sous-groupe de G car c'est le stabilisateur du premier vecteur e_1 de la base standard de $\mathbb{R}^2$ pour l'action habituelle de G sur $\mathbb{R}^2$.

est une bijection. D'après la définition du groupe quotient, on a

$$f(a) \star f(b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} H \star \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} H = \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \right) H = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & (ab)^{-1} \end{pmatrix} H = f(ab)$$

quels que soient $a, b \in \mathbb{R}^\star$. L'application f est donc un morphisme. Comme f est une bijection, f est un isomorphisme.