

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHÉMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 17 avril 2018, 8h00-8h30

Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soit G le sous-ensemble de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures, c-à-d,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

On admettra que G est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On pourra utiliser que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Soit H le sous-ensemble de G des matrices dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, c-à-d,

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Montrer que H est un sous-groupe de G .
- Montrer que H est distingué dans G .
- Montrer que pour tout $g \in G$ il existe une et une seule matrice diagonale $g' \in G$ telle que $g' \in gH$.
- Montrer que le groupe quotient G/H est isomorphe au groupe multiplicatif \mathbb{R}^* .