Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 10 avril février 2018, 8h00-8h30

CORRIGE

Exercice 1. a. Soient $\sigma \in S_9$ et $(A, B, C) \in \mathcal{P}$. Comme $A \cap B = \emptyset$ et comme σ est injective, on a $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. De même, $\sigma(A) \cap \sigma(C) = \emptyset$ et $\sigma(B) \cap \sigma(C) = \emptyset$. Il s'ensuit que les sous-ensembles $\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)$ sont deux-à-deux disjoints. De plus, comme σ est injective, $|\sigma(A)| = |A| = 4$, $|\sigma(B)| = |B| = 3$ et $|\sigma(C)| = |C| = 2$. Par conséquent, $(\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C))$ appartient bien à $\mathcal{P}$.

b. On a
$$\mathrm{id} \star (A, B, C) = (\mathrm{id}(A), \mathrm{id}(B), \mathrm{id}(C)) = (A, B, C)$$
quel que soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}$. De plus,
$$(\sigma\tau) \star (A, B, C) = ((\sigma\tau)(A), (\sigma\tau)(B), (\sigma\tau)(C)) = \\ (\sigma(\tau(A)), \sigma(\tau(B)), \sigma(\tau(C))) = \sigma \star (\tau(A), \tau(B), \tau(C)) = \\ \sigma \star (\tau \star (A, B, C))$$
quels que soient $\sigma, \tau \in S_9$ et $(A, B, C) \in \mathcal{P}$. Par conséquent, $\star$ est une action.

c. Soit (A, B, C) un élément quelconque de $\mathcal{P}$. On a donc
$$A = \{i_1, i_2, i_3, i_4\},\ B = \{i_5, i_6, i_7\},\ C = \{i_8, i_9\}$$
avec $i_1, \ldots, i_9 \in \{1, \ldots, 9\}$ tous distincts. Du coup, l'application
$$\sigma \colon \{1, \ldots, 9\} \to \{1, \ldots, 9\}$$
définie par $\sigma(k) = i_k$ est injective. Elle est donc aussi surjective et appartient à S_9. On a
$$\sigma \star P = \sigma \star (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}, \{8, 9\}) = \\ (\sigma(\{1, 2, 3, 4\}), \sigma(\{5, 6, 7\}), \sigma(\{8, 9\})) = (A, B, C).$$
Par conséquent, $(A, B, C) \in S_9P$ et $S_9P = \mathcal{P}$.

d. Un élément σ de S_9 appartient au stabilisateur de P si et seulement si
$$\sigma(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\},\ \sigma(\{5, 6, 7\}) = \{5, 6, 7\},\ \sigma(\{8, 9\}) = \{8, 9\}.$$
Il s'ensuit que $(S_9)_P$ est isomorphe au groupe produit $S_4 \times S_3 \times S_2$. En particulier,
$$|(S_9)_P| = |S_4| \times |S_3| \times |S_2| = 4! \cdot 3! \cdot 2!.$$

e. D'après le c et le d, on a
$$|\mathcal{P}| = |S_9P| = \frac{|S_9|}{|(S_9)_P|} = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}.$$