Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 22 février 2018, 10h15-10h35

CORRIGE

Exercice 1. a. On a
$$\sigma(1) = 4,\ \sigma(4) = 6,\ \sigma(6) = 1.$$
Donc $\{1, 4, 6\}$ est une orbite. Comme $\sigma(2) = 2$, le singleton $\{2\}$ est une orbite. Puis on a
$$\sigma(3) = 5,\ \sigma(5) = 9,\ \sigma(9) = 7,\ \sigma(7) = 3.$$
Donc $\{3, 5, 9, 7\}$ est une orbite. Comme $\sigma(8) = 8$, le singleton $\{8\}$ est une orbite. Remarquons que la réunion des 4 orbites trouvées est égale à $\{1, \ldots, 9\}$. On a donc déterminé toutes les orbites :
$$\{1, 4, 6\},\ \{2\},\ \{3, 5, 9, 7\},\ \{8\}.$$

b. D'après le a, on a
$$\sigma = (1\,4\,6)(3\,5\,9\,7) = (3\,5\,9\,7)(1\,4\,6).$$

c. Le type de σ est donc $(4, 3)$.

d. L'ordre de σ est le ppcm de 4 et 3 à savoir 12.

e. Comme 1 est permuté par un cycle de longueur 3, on a $\sigma^n(1) = 1$ si et seulement si $3|n$, quel que soit l'entier n. Le stabilisateur est donc
$$\langle\sigma\rangle_1 = \{\mathrm{id}, \sigma^3, \sigma^6, \sigma^9\}$$
compte tenu du fait que
$$\langle\sigma\rangle = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{11}\}.$$

f. La question est de savoir si σ^n peut être conjugué à $(1\,2)(3\,4)$ dans S_9. Cela revient à demander s'il existe un entier n tel que σ^n est de type $(2, 2)$. Or,
$$\sigma^3 = ((3\,5\,9\,7)(1\,4\,6))^3 = (3\,5\,9\,7)^3(1\,4\,6)^3 = (3\,7\,9\,5)$$
car les cycles sont à supports disjoints. Donc
$$\sigma^6 = (3\,9)(7\,5)$$
est bien de type $(2, 2)$. Par conséquent, il existe bien τ et n tels que $\tau\sigma^n\tau^{-1} = (1\,2)(3\,4)$. Il suffit de prendre $n = 6$ et $\tau = (5\,4)(7\,3)(9\,2)(3\,1)$. En effet,
$$\tau\sigma^6\tau^{-1} = \tau(3\,9)(7\,5)\tau^{-1} = \tau(3\,9)\tau^{-1}\tau(7\,5)\tau^{-1} = (\tau(3)\,\tau(9))(\tau(7)\,\tau(5)) = (1\,2)(3\,4).$$