

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHÉMATIQUES

ARITHMÉTIQUE ET APPLICATIONS

Contrôle continu, le 5 avril 2024, 15h45-16h15

CORRIGÉ

a. Comme $99 \equiv 3 \pmod{4}$, on a $\left(\frac{-1}{99}\right) = -1$.

b. Comme $99 \equiv 3 \pmod{8}$, on a $\left(\frac{2}{99}\right) = -1$.

c. On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{71}{115}\right) &= -\left(\frac{115}{71}\right) && \text{car } 71 \equiv 3 \text{ et } 115 \equiv 3 \pmod{4} \\ &= -\left(\frac{44}{71}\right) && \text{car } 115 \equiv 44 \pmod{71} \\ &= -\left(\frac{2}{71}\right)^2 \times \left(\frac{11}{71}\right) && \text{par multiplicativité et } 44 = 2^2 \times 11 \\ &= \left(\frac{71}{11}\right) && \text{car } 71 \equiv 3 \text{ et } 11 \equiv 3 \pmod{4} \\ &= \left(\frac{5}{11}\right) && \text{car } 71 \equiv 5 \pmod{11} \\ &= \left(\frac{11}{5}\right) && \text{car } 5 \equiv 1 \pmod{4} \\ &= \left(\frac{1}{5}\right) && \text{car } 11 \equiv 1 \pmod{5} \\ &= 1 && \text{car } 1 \text{ est un carré dans } \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

d. Comme $4|100$, on a

$$1111111111 \equiv 1111111100 + 11 \equiv 0 + 11 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Du coup,

$$\left(\frac{-1}{1111111111}\right) = -1.$$

e. Comme $100 \equiv 4 \pmod{8}$, on a $1000 \equiv 40 \equiv 0 \pmod{8}$, et donc $8|1000$. Du coup, on a

$$1111111111 \equiv 1111111000 + 100 + 11 \equiv 0 + 4 + 11 \equiv -1 \pmod{8}.$$

Du coup,

$$\left(\frac{2}{1111111111}\right) = 1.$$

f. Comme $11 \equiv 3 \pmod{4}$ et $1234567891 \equiv 91 \equiv 3 \pmod{4}$, on a

$$\left(\frac{11}{1234567891}\right) = -\left(\frac{1234567891}{11}\right).$$

Comme $10 \equiv -1 \pmod{11}$, on a $10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$ et donc

$$\begin{aligned} 1234567891 &= 1 + 9 \times 10 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10^3 + 6 \times 10^4 + 5 \times 10^5 + \\ &4 \times 10^6 + 3 \times 10^7 + 2 \times 10^8 + 1 \times 10^9 \equiv \\ &1 - 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1 \equiv -4 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Du coup,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1234567891}{11}\right) &= -\left(\frac{-4}{11}\right) \\ &= -\left(\frac{-1}{11}\right) \times \left(\frac{2}{11}\right)^2 \quad \text{par multiplicativité et } -4 = (-1) \times 2^2 \\ &= 1 \quad \text{car } 11 \equiv 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$

g. Comme

$$10! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7,$$

on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{10!}\right) &= \left(\frac{-1}{3^4 \times 5^2 \times 7}\right) \quad \text{car } \left(\frac{a}{2n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{-1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-1}{7}\right) \quad \text{par définition du symbole de Jacobi} \\ &= -1 \quad \text{car } 7 \equiv 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$