Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ARITHMETIQUE ET APPLICATIONS, COMBINATOIRE ET GRAPHES

Examen terminal, le 18 juin 2014, 9h00–12h00

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. **(1 pt)** Un triangle n'a aucune diagonale. D'où $a_3 = 0$. Un quadrilatère convexe a 2 diagonales. D'où $a_4 = 2$. On a donc bien $a_{3+1} = a_3 + 3 - 1$, i.e., l'énoncé est vrai au rang $n = 3$.

Supposons que $a_{n+1} = a_n + n - 1$ pour un certain $n \geq 3$. Montrons que le nombre de diagonales a_{n+2} d'un $(n+2)$-gon convexe est égal à $a_{n+1} + (n+1) - 1$. Soit donc P_{n+2} un $(n+2)$-gon convexe. Soient $s_1, \dots, s_{n+2}$ ses sommets. Soit P_{n+1} le $(n+1)$-gon convexe obtenu à partir de P_{n+2} en supprimant le sommet s_{n+2}, i.e., P_{n+1} est le $(n+1)$-gon convexe de sommets $s_1, \dots, s_{n+1}$. Or, toutes les diagonales de P_{n+1} sont diagonale de P_{n+2}. De plus, le côté $s_{n+1}s_1$ de P_{n+1} est diagonale de P_{n+2}. Elles constituent, ensemble, les diagonales de P_{n+2} qui ne contiennent pas le sommet s_{n+2}, et elles sont donc $a_{n+1} + 1$ en nombre. Comme P_{n+2} possède exactement $(n + 2) - 3 = n - 1$ diagonales issues du sommet s_{n+2}, le nombre de diagonales de P_{n+2} est $a_{n+1} + 1 + n - 1 = a_{n+1} + (n + 1) - 1$ ce qu'il fallait démontrer.

b. **(2 pts)** Comme $a_3 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + n - 1$ pour $n \geq 3$, on a

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3}X^n = a_3 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+3}X^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{(n+2)+1}X^n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+2} + (n+2) - 1)X^n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+2} + (n+1))X^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}X^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)X^n = X\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}X^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} D(X^{n+1}) =$$

$$X\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3}X^n + D(\sum_{n=1}^{\infty} X^{n+1}) = XF + D\left(\frac{1}{1-X} - 1 - X\right) = XF + \frac{1}{(1-X)^2} - 1.$$

Du coup,

$$(1 - X)F = \frac{1}{(1-X)^2} - 1$$

et le résultat recherché s'obtient en divisant par $1 - X$.

c. **(1 pt)** On sait que

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n.$$

Du coup,

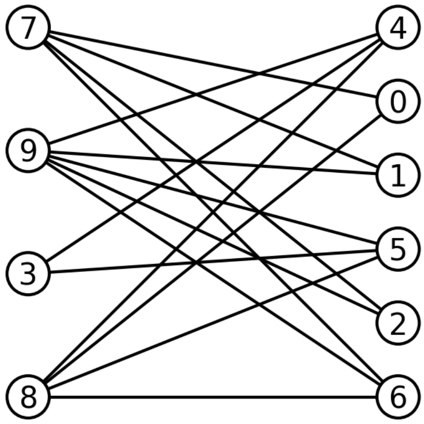
$$\frac{1}{(1-X)^3} = \frac{1}{2}D^2\left(\frac{1}{1-X}\right) = \frac{1}{2}D^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} X^n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)X^{n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)X^n.$$

D'après le b, on a donc

$$F = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)X^n - \sum_{n=0}^{\infty}X^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)-1)X^n.$$

Il vient $a_{n+3} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{1}{2}n(n+3)$, ou encore $a_n = \frac{1}{2}n(n-3)$ pour tout $n \geq 3$.

Exercice 2. (2 pts) En dessinant le graphe G comme ceci



on voit de suite qu'il est biparti.

Exercice 3. a. **(2 pts)** On a $v_0 = 0$, $S_0 = \{0\}$ et $q_0 \colon S_0 \setminus \{0\} \to S_0$ l'inclusion de l'ensemble vide dans S_0.

Au rang $n = 1$, on cherche $u \in S_0$ et $v \in V \setminus S_0$ avec $uv \in E$ et $w(uv)$ minimal. On peut prendre $u = 0$ et $v = 1$. Du coup, on pose $S_1 = \{0, 1\}$, et $q_1 \colon S_1 \setminus \{0\} \to S_1$ est l'application définie par $q_1(1) = 0$.

Au rang $n = 2$, on cherche $u \in S_1$ et $v \in V \setminus S_1$ avec $uv \in E$ et $w(uv)$ minimal. On peut prendre $u = 0$ et $v = 2$. Du coup, on pose $S_2 = \{0, 1, 2\}$, et $q_2 \colon S_2 \setminus \{0\} \to S_2$ est l'application définie par $q_2(1) = 0$ et $q_2(2) = 0$.

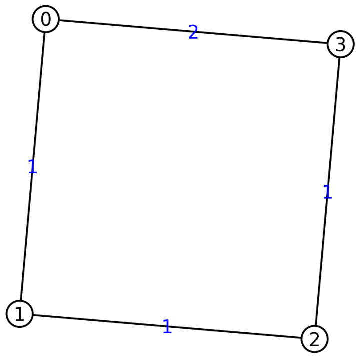
Au rang $n = 3$, on cherche $u \in S_2$ et $v \in V \setminus S_2$ avec $uv \in E$ et $w(uv)$ minimal. On doit prendre $u = 0$ et $v = 3$. Du coup, on pose $S_3 = \{0, 1, 2, 3\}$, et $q_3 \colon S_3 \setminus \{0\} \to S_3$ est l'application définie par $q_3(1) = 0$, $q_3(2) = 0$ et $q_3(3) = 1$.

Au rang $n = 4$, on cherche $u \in S_3$ et $v \in V \setminus S_3$ avec $uv \in E$ et $w(uv)$ minimal. On doit prendre $u = 3$ et $v = 4$. Du coup, on pose $S_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et $q_4 \colon S_4 \setminus \{0\} \to S_4$ est l'application définie par $q_4(1) = 0$, $q_4(2) = 0$, $q_4(3) = 1$ et $q_4(4) = 3$.

Au rang $n = 5$, on cherche $u \in S_4$ et $v \in V \setminus S_4$ avec $uv \in E$ et $w(uv)$ minimal. On doit prendre $u = 3$ et $v = 5$. Du coup, on pose $S_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, et $q_5 \colon S_5 \setminus \{0\} \to S_5$ est l'application définie par $q_5(1) = 0$, $q_5(2) = 0$, $q_5(3) = 1$, $q_5(4) = 3$ et $q_5(5) = 3$.

Comme $S_5 = V$, l'algorithme est terminé.

b. **(2 pts)** Soit G le graphe pondéré ci-dessous. Si on déroule l'algorithme ci-dessus sur ce graphe avec $v_0 = 0$, on obtient l'application $q \colon V \setminus \{0\} \to V$ définie par $q(1) = 0$, $q(2) = 1$ et $q(3) = 2$. Pour $v = 3$, le chemin $v, q(v), q^2(v), q^3(v)$ est donc le chemin $3, 2, 1, 0$ qui est de longueur pondérée $1 + 1 + 1 = 3$. Or, le chemin $3, 0$ est de longueur pondérée 2. Le chemin de 3 à 0 de l'algorithme n'est donc pas le chemin le plus court dans le graphe pondéré G.



Exercice 4. (4 pts) L'énoncé est faux. Un contre-exemple s'obtient en prenant $K = \mathbb{F}_{16}$. Le groupe multiplicatif $K^\star$ de K est un groupe cyclique de cardinal $16 - 1 = 15$. Ce groupe contient donc un sous-groupe G à 5 éléments. Montrons par l'absurde que $G \neq L^\star$ pour tout sous-corps L de K. Supposons que $G = L^\star$ pour L un sous-corps de K. Le corps L aura donc $5 + 1 = 6$ éléments. Or, on sait que le cardinal d'un corps fini est une puissance d'un nombre premier. Comme 6 n'est pas une puissance d'un nombre premier, il y a contradiction.

Exercice 5. (4 pts) On sait que

$$X^{21} - 1 = \prod_{d|21} \Phi_d(X) = \Phi_1(X)\Phi_3(X)\Phi_7(X)\Phi_{21}(X).$$

Or, $\Phi_1(X) = X - 1$ et

$$X^{21} - 1 = (X-1)(X^{20} + X^{19} + X^{18} + \cdots + 1).$$

D'où

$$X^{20} + X^{19} + X^{18} + \cdots + 1 = \Phi_3(X)\Phi_7(X)\Phi_{21}(X).$$

Comme $X^7 - 1 = (X-1)\Phi_7(X)$, on a $\Phi_7(X) = X^6 + X^5 + X^4 + \cdots + 1$, et

$$X^{20} + X^{19} + X^{18} + \cdots + 1 = (X^6 + X^5 + X^4 + \cdots + 1)(X^{14} + X^7 + 1).$$

Du coup,

$$X^{14} + X^7 + 1 = \Phi_3(X)\Phi_{21}(X).$$

Comme $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$ et

$$X^{14} + X^7 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^{12} - X^{11} + X^9 - X^8 + X^6 - X^4 + X^3 - X + 1),$$

on obtient finalement

$$\Phi_{21}(X) = X^{12} - X^{11} + X^9 - X^8 + X^6 - X^4 + X^3 - X + 1.$$