

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHÉMATIQUES

ARITHMÉTIQUE ET APPLICATIONS,
COMBINATOIRE ET GRAPHES

Contrôle continu, le 16 avril 2013, 13h30–14h00

Documents et calculatrices sont interdits.

- Exercice 1.**
- a. Déterminer un élément δ du groupe multiplicatif \mathbb{F}_7^* d'ordre 3.
 - b. Montrer que le groupe multiplicatif \mathbb{F}_7^* ne contient pas d'élément d'ordre 4.
 - c. En déduire que le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_7[X]$.
 - d. Soit K le corps $\mathbb{F}_7[X]/(X^2 + 1)$ et notons $\alpha = \overline{X}$. Quel est le cardinal de K ?
 - e. Montrer que α est d'ordre 4 dans le groupe multiplicatif K^* .
 - f. Déterminer un élément $\beta \in K$, sous la forme $a\alpha + b$ avec $a, b \in \mathbb{F}_7$, tel que $\beta^2 = \alpha$.
 - g. Montrer que β est d'ordre 8 dans le groupe multiplicatif K^* .
 - h. Déterminer le polynôme minimal de β sur \mathbb{F}_7 .
 - i. Montrer que $\mathbb{F}_7[\beta] = K$.
 - j. Déterminer un élément $\gamma \in K$, sous la forme $a\beta + b$ avec $a, b \in \mathbb{F}_7$, tel que $\gamma^2 = \beta$.
 - k. Montrer que γ est d'ordre 16 dans le groupe multiplicatif K^* .
 - l. En déduire un générateur du groupe multiplicatif K^* .