Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ARITHMETIQUE ET APPLICATIONS, COMBINATOIRE ET GRAPHES

Contrôle continu, le 12 février 2013, 9h00–9h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite definie par

$$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2,$$

où il est entendu que $a_0 = 0$. Le but de cet exercice est de retrouver, grâce aux séries formelles, la formule bien connue $a_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Soit F la série formelle définie par $F = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$.

a. Montrer que $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $(1-X)F = \frac{X+X^2}{(1-X)^3}$.

c. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{X+X^2}{(1-X)^4}$.

d. Conclure.