Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L2 DE MATHEMATIQUES

ANALYSE NUMERIQUE ET PROGRAMMATION

Examen terminal, le 2 mai 2018, 8h30-11h30

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. **(0,5 pt)** Le plus grand nombre à virgule flottante double précision est

$$\Omega = 1,111\cdots 1_2 \times 2^{1023}$$

dont la mantisse possède 52 chiffres binaires derrière la virgule, soit

$$\Omega + 2^{-52} \times 2^{1023} = 2^{1024},$$

ou encore $\Omega = (1 - 2^{-53}) \times 2^{1024}$.

b. **(0,5 pt)** Le plus petit nombre à virgule flottante double précision strictement positif est

$$\omega = 0,000\cdots 01_2 \times 2^{-1022}$$

dont la mantisse possède 52 chiffres binaires derrière la virgule, soit

$$\omega = 2^{-52} \times 2^{-1022} = 2^{-1074}.$$

c. **(0,5 pt)** Le plus petit nombre à virgule flottante double précision normalisé strictement positif est

$$\nu = 1,000\cdots 00_2 \times 2^{-1022}$$

dont la mantisse possède 52 chiffres binaires derrière la virgule.

d. **(0,5 pt)** On a

$$\nu + \omega = 1,000\cdots 01_2 \times 2^{-1022}$$

dont la mantisse possède toujours 52 chiffres après la virgule.

e. **(1 pt)** On a

$$2\nu = 1,000\cdots 00_2 \times 2^{-1021}$$

et

$$\omega = 0,000\cdots 01_2 \times 2^{-1021}$$

dont les mantisse ont toutes les deux 53 chiffres derrière la virgule. La somme $2\nu+\omega$ vaut

$$1,000\cdots 01_2 \times 2^{-1021}$$

avec 53 chiffres après la virgule. L'arrondi à un nombre à virgule flottante double précision est litigeux et on arrondit vers le bas en l'occurrence :

$$2\nu + \omega = 1,000\cdots 0_2 \times 2^{-1021}$$

en double précision, c-à-d avec 52 chiffres après la virgule.

f. **(1 pt)** D'après le e, on a $2\nu + \omega = 2\nu$ en double précision, et donc

$$(2\nu + \omega) + \omega = 2\nu + \omega = 2\nu = 1,000 \cdots 00_2 \times 2^{-1021}$$

en double précision. Par contre

$$2\nu + (\omega + \omega) = 2\nu + 2\omega = 1,000 \cdots 01_2 \times 2^{-1021}$$

en double précision. On constate que $(2\nu + \omega) + \omega \neq 2\nu + (\omega + \omega)$.

Exercice 2. Voici un programme récursif de fusion **(3 pts)** :

```
def fusion(L1,L2):
    if L1==[] :
            return L2
    if L2==[] :
            return L1
    if L1[0]<=L2[0] :
            return L1[:1]+fusion(L1[1:],L2)
    else :
            return L2[:1]+fusion(L1,L2[1:])
```

et en voici un non récursif **(3 pts)** :

```
def fusion(L1,L2):
    n1,n2=len(L1),len(L2)
    i1,i2=0,0
    L=[]
    while (i1<n1 and i2<n2) :
            if L1[i1]<=L2[i2] :
                    L.append(L1[i1])
                    i1+=1
            else :
                    L.append(L2[i2])
                    i2+=1
    if i1==n1 :
            return L+L2[i2:]
    else :
            return L+L1[i1:]
```

Exercice 3. a. Comme A n'est pas symétrique, on applique la formule

$$||A|| = \sqrt{||{}^tAA||} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

On calcule

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

La norme de cette dernière est égale à 25. La norme de A est donc égale à 5 **(1 pt)**.

b. On voit facilement que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & 0 & \frac{4}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{25} & 0 & \frac{3}{25} \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

On a $||A^{-1}|| = \sqrt{||{}^tA^{-1}A^{-1}||}$. Or,

$${}^tA^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & 0 & -\frac{4}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{25} & 0 & \frac{3}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & 0 & \frac{4}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{25} & 0 & \frac{3}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix}.$$

La norme de ${}^tA^{-1}A^{-1}$ est donc égale à 1, et la norme de A^{-1} est égale à 1 **(1 pt)**.

c. **(1 pt)** On a

$$c(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = 5 \times 1 = 5.$$

Exercice 4. a. On déroule l'algorithme du pivot de Gauss **(1 pt)** :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \star \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \\ \star \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Du coup,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

b. **(1 pt)** On part de la décomposition LU de A et on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

la décomposition de Cholesky de A.

c. On pose

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

avec $h_{11}, h_{22}, h_{33} \geq 0$, et on suppose que $H^t H = A$ **(1 pt)**. On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} \\ 0 & h_{22} & h_{32} \\ 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}^2 & \star & \star \\ h_{21}h_{11} & h_{21}^2 + h_{22}^2 & \star \\ h_{31}h_{11} & h_{31}h_{21} + h_{32}h_{22} & h_{31}^2 + h_{32}^2 + h_{33}^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $h_{11} = 1$, $h_{21} = 1$, $h_{31} = -1$, $h_{22} = 2$, $h_{32} = 1$ et $h_{33} = 3$, c-à-d,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$