Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L2 DE MATHEMATIQUES

ANALYSE NUMERIQUE ET PORGRAMMATION

Contrôle continu, le 17 avril 2018, 13h30-14h00

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. Comme A est symétrique, on détermine d'abord les valeurs propres de A **(1 pt)**. Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & -1-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \qquad L_3' = L_3 - L_2$$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad (\lambda-3) \text{ en facteur}$$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & -2 \\ -2 & -5-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad C_2' = C_2 + C_3$$

$$= -(\lambda-3)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{en développant suivant } L_3$$

$$= -(\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda-18) =$$

$$-(\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda+6) \qquad \textbf{(2 pt)}$$

Du coup, les valeurs propres de A sont -6 et 3. Comme A est symétrique, la norme de A est le maximum des valeurs absolues des valeurs propres de A :

$$||A|| = \max\{|-6|, |3|\} = \max\{6, 3\} = 6 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

b. Les valeurs propres de A^{-1} sont $-\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$ **(1 pt)**. Comme A^{-1} est également symétrique,

$$||A^{-1}|| = \max\{|-\tfrac{1}{6}|, |\tfrac{1}{3}|\} = \max\{\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}\} = \tfrac{1}{3} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

c. Le conditionnement $c(A)$ est alors

$$c(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = 6 \cdot \tfrac{1}{3} = 2 \quad \textbf{(1 pt)}.$$