Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Examen terminal, le 6 mai 2015, 13h30-16h30

CORRIGE et BAREME

Question de cours. a. **(1 pt)** L'application f est différentiable en a s'il existe une application linéaire L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ de norme suffisamment petite, on a

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + ||h|| \cdot \varepsilon(h),$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ dans $\mathbb{R}^m$ lorsque $h \to 0$.

b. **(1 pt)** Si f est différentiable en a, la différentielle de f est l'unique application linéaire L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ satisfaisant la condition du a.

c. **(2 pt)** Supposons qu'il existe deux applications linéaires L et M satisfaisant le a, i.e., on a

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + ||h|| \cdot \varepsilon(h)$$

et

$$f(a+h) = f(a) + M(h) + ||h|| \cdot \delta(h),$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ et $\delta(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. On montre que $L = M$. On a

$$f(a) + L(h) + ||h|| \cdot \varepsilon(h) = f(a) + M(h) + ||h|| \cdot \delta(h)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ de norme suffisamment petite, disons pour tout h avec $||h|| < \eta$ où $\eta > 0$. Du coup,

$$(L - M)(h) = L(h) - M(h) = ||h|| \cdot (\delta(h) - \varepsilon(h))$$

pour tout h avec $||h|| < \eta$. En particulier,

$$\frac{||(L-M)(h)||}{||h||} = ||\delta(h) - \varepsilon(h)||$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ avec $||h|| < \eta$.

Montrons que l'application linéaire $L - M$ est nulle. Par homogénéité, on a

$$|||L - M||| = \sup_{||h||=1} \frac{||(L-M)(h)||}{||h||} = \sup_{||h||=\nu} \frac{||(L-M)(h)||}{||h||}$$

pour tout $\nu > 0$. Du coup, pour tout ν avec $0 < \nu < \eta$ on a

$$|||L - M||| = \sup_{||h||=\nu} ||\delta(h) - \varepsilon(h)|| \leq \sup_{||h||=\nu} ||\delta(h)|| + \sup_{||h||=\nu} ||\varepsilon(h)|| \to 0 + 0 = 0$$

lorsque $\nu \to 0$, car $\delta(h) \to 0$ et $\varepsilon(h) \to 0$ pour $h \to 0$. Cela montre que $|||L - M||| = 0$, i.e., $L - M = 0$ et $L = M$.

Exercice 1. a. **(1 pt)** Soit $(a, b) \in U \times V$. On a donc $a \in U$ et $b \in V$. Comme U et V sont ouverts, il existe $r, s > 0$ tels que $B(a, r) \subseteq U$ et $B(b, s) \subseteq V$. Soit $t = \min\{r, s\}$. Montrons que $B((a, b), t) \subseteq U \times V$. Soit $(x, y) \in B((a, b), t)$. On a alors

$$||x - a||^2 \leq ||x - a||^2 + ||y - b||^2 = ||(x, y) - (a, b)||^2 < t \leq r$$

et

$$||y - b||^2 \leq ||x - a||^2 + ||y - b||^2 = ||(x, y) - (a, b)||^2 < t \leq s.$$

Du coup, $x \in B(a, r) \subseteq U$ et $y \in B(b, s) \subseteq V$. D'où $(x, y) \in U \times V$. Cela montre que $B((a, b), t) \subseteq U \times V$ et donc que $U \times V$ est ouvert.

b. **(1 pt)** Comme F et G sont fermés, leurs complémentaires $U = \mathbb{R}^m \setminus F$ et $V = \mathbb{R}^n \setminus G$ sont ouverts. Du coup,

$$\mathbb{R}^{m+n} \setminus (F \times G) = (U \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^m \times V)$$

est ouvert comme réunion d'ouverts, i.e., $F \times G$ est fermé.

c. **(1 pt)** Compte tenu du b, il suffit de montrer que $C \times D$ est borné. Comme C et D sont bornés, il existe $R, S \geq 0$ tels que $C \subseteq \overline{B}(0, R)$ et $D \subseteq \overline{B}(0, S)$. Soit $T = \sqrt{R^2 + S^2}$. Montrons que $C \times D \subseteq \overline{B}(0, T)$ dans $\mathbb{R}^{m+n}$. Soit $(x, y) \in C \times D$. On a donc $||x|| \leq R$ et $||y|| \leq S$. Du coup,

$$||(x, y)||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \leq R^2 + S^2 = T^2,$$

i.e.,$(x, y) \in \overline{B}(0, T)$ dans $\mathbb{R}^{m+n}$. Cela montre que $C \times D \subseteq \overline{B}(0, T)$, et que $C \times D$ est borné.

Exercice 2. a. **(1 pt)** Les fonctions coordonnées de f sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, f est continûment différentiable. D'après le cours, toute fonction continûment différentiable est différentiable. Donc f est différentiable.

b. **(2 pts)** La différentielle de f en (a, b) est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases standard est la matrice jacobienne

$$J_{(a,b)}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Or, on a

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & = & e^{\sin(y)} & & \frac{\partial f_1}{\partial y} & = & x e^{\sin(y)} \cos(y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & = & \frac{2x}{x^2+y^2+1} & & \frac{\partial f_2}{\partial y} & = & \frac{2y}{x^2+y^2+1} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & = & \frac{y}{(xy)^2+1} & & \frac{\partial f_3}{\partial y} & = & \frac{x}{(xy)^2+1}. \end{array}$$

Exercice 3. a, c et f. **(3 × 0,5 pt)** Rappelons que $t^x = \exp(x \ln(t))$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, et est *a fortiori* continûment différentiable sur $]-2, -1[\times]0, +\infty[$. En particulier, $f(x, t)$ est continue en x pour tout $t > 0$, la fonction f est partiellement differentiable par rapport a x, et la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue en x pour tout $t > 0$.

b. **(1 pt)** Soit $x \in]-2, -1[$. Rappelons que $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a donc $|f(x, t)| = |t^x \sin(t)| \leq t^{x+1}$ pour tout $t > 0$. Comme $x + 1 > -1$, la fonction $t \mapsto t^{x+1}$ est intégrable sur $]0, 1]$. Il s'ensuit que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1]$. Elle est même absolument intégrable sur $]0, 1]$.

Quant à l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$, remarquons qu'on a $|f(x,t)| = |t^x \sin(t)| \leq t^x$ pour tout $t > 0$. Comme $x < -1$, la fonction $t \mapsto t^x$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Il s'ensuit que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Elle est même absolument intégrable sur $[1,+\infty[$.

Par conséquent, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1] \cup [1,+\infty[=]0,+\infty[$. Elle est même absolument intégrable.

d. **(1 pt)** On a $\frac{\partial f}{\partial x} = t^x \ln(t)\sin(t)$.

e. **(1 pt)** Soit $x \in]-2,-1[$. Rappelons que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $t^\varepsilon \ln(t) \to 0$ lorsque $t \to 0^+$. Du coup, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\ln(t)| \leq t^{-\varepsilon}$ pour tout t avec $0 < t < \delta$. Prenons $\varepsilon > 0$ tel que $x - \varepsilon > -2$, il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$|\frac{\partial f}{\partial x}| = |t^x \ln(t)\sin(t)| \leq |t^{x-\varepsilon}\sin(t)|$$

pour tout t avec $0 < t < \delta$. D'après le b ci-dessus, le second membre est intégrable sur $]0,\delta]$ car $x - \varepsilon > -2$. Du coup, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,\delta]$.

De même, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $t^{-\varepsilon}\ln(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Du coup, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $|\ln(t)| \leq t^\varepsilon$ pour tout $t \geq A$. Prenons $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon < -1$. Il existe donc $A > 0$ tel que

$$|\frac{\partial f}{\partial x}| = |t^x \ln(t)\sin(t)| \leq |t^{x+\varepsilon}\sin(t)|$$

pour tout $t \geq A$. D'après le b ci-dessus, le second membre est intégrable sur $[A,+\infty[$ car $x + \varepsilon < -1$. Du coup, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $[A,+\infty[$.

Comme la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[\delta, A]$, elle y est intégrable. Au final, elle est intégrable sur $]0,+\infty[$ tout entier.

g. **(2 pts)** On montre que F est continue sur tout segment $[a,b]$ contenu dans $]-2,-1[$. Pour $x \in [a,b]$ on a

$$|f(x,t)| = |t^x \sin(t)| \leq \begin{cases} t^{a+1} & \text{si } 0 < t \leq 1, \text{ et} \\ t^b & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Si on définit donc $g\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$g(t) = \begin{cases} t^{a+1} & \text{si } 0 < t \leq 1, \text{ et} \\ t^b & \text{si } t > 1. \end{cases},$$

alors on a $|f(x,t)| \leq g(t)$, pour tout $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$. Comme $a+1 > -1$ et $b < -1$, la fonction g est intégrable sur $]0,+\infty[$. De plus, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue pour tout t d'après le a, et la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable pour tout $x \in [a,b]$ d'après le b. D'après le cours, la fonction F est continue sur $[a,b]$.

h. **(2 pts)** On montre que F est dérivable sur tout segment $[a,b]$ contenu dans $]-2,-1[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a - \varepsilon > -2$ et $b + \varepsilon < -1$. Soit $\delta > 0$ tel que $|\ln(t)| \leq t^{-\varepsilon}$ pour tout t avec $0 < t < \delta$. Soit $A > 0$ tel que $|\ln(t)| \leq t^\varepsilon$ pour tout $t \geq A$. Soit M le maximum de la fonction continue $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $[a,b] \times [\delta, A]$. Alors,

$$|\frac{\partial f}{\partial x}| = |t^x \ln(t)\sin(t)| \leq h(t) = \begin{cases} t^{a-\varepsilon+1} & \text{si } 0 < t \leq \delta, \text{ et} \\ M & \text{si } \delta \leq t < A \\ t^{b+\varepsilon} & \text{si } t \geq A. \end{cases}$$

Comme h est intégrable sur $]0,+\infty[$, la fonction F est dérivable sur $[a,b]$ d'après le cours, et d'après le c et e.

i. **(0,5 pt)** D'après le cours, on a, de plus,

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}\, dt = \int_0^\infty t^x \ln(t) \sin(t)\, dt.$$

j. **(1 pt)** D'après les arguments du h, et d'après le e, f et i, la fonction F' est continue.