Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Contrôle continu, le 12 février 2015, 10h15-10h45

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Soit $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(t) = \left(e^{-\frac{1}{t}}, \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right)$$

lorsque $t > 0$, et $f(0) = (0,1)$. Soient f_1 et f_2 les deux fonctions coordonnées de f.

a. Montrer que f est continue.

b. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

c. Montrer que $0 \leq f_1(t) \leq 1$ et $-1 \leq f_2(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$.

d. En déduire que $||f(t) - f(0)|| \leq \sqrt{5}$ pour tout $t \geq 0$.

e. Montrer que f est dérivable et déterminer $f'(t)$ pour tout $t \geq 0$.

f. Rappeler l'inégalité des accroissements finis pour f sur l'intervalle $[0,t]$, où $t > 0$.

g. Montrer que $|f_1'(t)| \leq \frac{4}{e^2}$ pour tout $t \geq 0$.

h. Montrer que $|f_2'(t)| \leq \frac{1}{6}$. (On pourra utiliser que $|x\cos(x) - \sin(x)| \leq \frac{1}{3}x^3$ pour tout $x \geq 0$.)

i. En deduire que $||f(t) - f(0)|| \leq t\sqrt{\frac{16}{e^4} + \frac{1}{36}}$ pour tout $t \geq 0$.

Barème indicatif sur 10 points :

1a	2,5 pts
1b	0,5 pt
1c	1 pt
1d	0,5 pt
1e	2,5 pts
1f	0,5 pt
1g	1 pt
1h	1 pt
1i	0,5 pt