Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Examen terminal 2nd session, le 17 juin 2014, 8h30-11h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soient $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ des applications. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et posons $b = f(a)$. Supposons que f est différentiable en a, et que g est différentiable en b. Montrer que $g \circ f$ est différentiable en a et que $D_a(g \circ f) = (D_b g) \circ (D_a f)$.

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la fonction vectorielle définie par

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$

où

$$f_1(t) = \frac{\sqrt{|t|}\cos(t)}{t^2+1}, \quad f_2(t) = \frac{\sqrt{|t|}\sin(t)}{t^2+1} \quad \text{et} \quad f_3(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

a. Déterminer le sous-ensemble U_i de $\mathbb{R}$ sur lequel f_i est dérivable, pour $i = 1, 2, 3$.

b. En déduire le sous-ensemble U sur lequel f est dérivable

c. La limite $\lim_{t\to-\infty} f(t)$ existe-t-elle ? Si oui la déterminer. Sinon dire pourquoi elle n'existe pas.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les applications définies par

$$f(x,y) = (x, xy) \quad \text{et} \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \text{ et} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a. L'application f, est-elle différentiable ? Si oui déterminer sa matrice jacobienne. Sinon dire pourquoi elle ne l'est pas.

b. La fonction g, est-elle différentiable ? Si oui déterminer sa matrice jacobienne. Sinon dire pourquoi elle ne l'est pas.

c. L'application $g \circ f$, est-elle différentiable ? Si oui déterminer sa matrice jacobienne. Sinon dire pourquoi elle ne l'est pas.

Exercice 3. Soit $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un application linéaire bijective, et soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base standard.

a. Montrer que $|||L||| \leq |a| + |b| + |c| + |d|$.

b. En déduire que

$$||L(x, y)|| \leq (|a| + |b| + |c| + |d|) \cdot ||(x, y)||$$

quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, où $|| \cdot ||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

c. Montrer que

$$\frac{|\det(M)|}{|a| + |b| + |c| + |d|} \cdot ||(x, y)|| \leq ||L(x, y)||$$

quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définissons une fonction réelle, notée $|| \cdot ||'$, sur $\mathbb{R}^2$ par $||(x, y)||' = ||L(x, y)||$.

d. Montrer que $|| \cdot ||'$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

e. Justifier l'existence des nombres réels $A, B > 0$ tels que

$$A||(x, y)|| \leq ||(x, y)||' \leq B||(x, y)||,$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

f. Montrer que

$$A = \frac{|\det(M)|}{|a| + |b| + |c| + |d|} \quad \text{et} \quad B = |a| + |b| + |c| + |d|$$

conviennent.

Exercice 4. Soit $X = [0, 2\pi]$ et $I = [0, 2\pi]$. Soit $f \colon X \times I \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, t) = \cos(x \cdot \sin(t))$$

a. Montrer que pour tout $x \in X$, la fonction $f_x \colon I \to \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = f(x, t)$ est intégrable sur I au sens de Henstock-Kurzweil.

Dans la suite on définit $F \colon X \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^{2\pi} f(x, t)dt$.

b. Que vaut $F(0)$?

c. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X.

d. Déterminer $F'(x)$.

e. Que vaut $F'(0)$?

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	5 pts
Exercice 1	3 pts
Exercice 2	3 pts
Exercice 3	5 pts
Exercice 4	4 pts