Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Examen terminal particulier, le 19 mai 2014, 9h00-12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner la définition d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

b. Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est fermé si et seulement si pour toute suite (x_k) dans F qui converge dans $\mathbb{R}^n$ on a $\lim x_k \in F$.

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la fonction vectorielle définie par

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$

où

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sqrt{\frac{t^4+2t^2}{(t^2+1)^3}} \cdot \cos(e^t) \\ f_2(t) &= \sqrt{\frac{t^4+2t^2}{(t^2+1)^3}} \cdot \sin(e^t) \\ f_3(t) &= \frac{-1}{t^2+1}. \end{aligned}$$

a. Déterminer le sous-ensemble U_i de $\mathbb{R}$ sur lequel f_i est dérivable, pour $i = 1, 2, 3$.

b. En déduire le sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ sur lequel f est dérivable.

c. La limite $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe-t-elle ? Si oui la déterminer. Sinon dire pourquoi elle n'existe pas.

Exercice 2. Soit U le sous-ensemble $\mathbb{R}^{+,\star} \times \mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^3$. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(r, \varphi, \theta) = ((1 + r\cos\theta)\cdot\cos\varphi, (1 + r\cos\theta)\cdot\sin\varphi, r\sin\theta).$$

a. Montrer que U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$.

b. Décrire l'image directe du sous-ensemble $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}^2$ par f.

c. L'application f est-elle injective ? Si oui, le démontrer. Si non, dire pourquoi elle ne l'est pas.

d. Montrer que $f(U) = \mathbb{R}^3$.

e. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

f. Déterminer les dérivées partielles de f en tout point de U.

g. Déterminer la matrice jacobienne $J_a f$ de f pour tout $a \in U$.

Soit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

h. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

i. Pourquoi la composition $g \circ f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

j. Déterminer la matrice jacobienne $J_a(g \circ f)$ de f pour tout $a \in U$.

Exercice 3. Définissons une fonction réelle, notée $||\cdot||'$, sur $\mathbb{R}^3$ par

$$||(x, y, z)||' = |x + y| + |x + y + z| + |y + z|.$$

a. Montrer que $||\cdot||'$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$.

b. Justifier l'existence des nombres réels $m, M > 0$ tels que

$$m||(x, y, z)|| \leq ||(x, y, z)||' \leq M||(x, y, z)||,$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, où $||\cdot||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer explicitement des nombres réels strictement positifs m et M tels que les deux inégalités ci-dessus sont vérifiées.

Exercice 4. Soit $I = [e, e^2]$. Soit $f\colon \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, t) = (\ln t)^x$$

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x\colon I \to \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = f(x, t)$ est intégrable sur I au sens de Henstock-Kurzweil.

Dans la suite on définit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_e^{e^2} f(x, t)\, dt.$$

b. Que valent $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$?

c. Exprimer $F(n)$ en fonction de $F(n-1)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

d. Montrer que f est partiellement différentiable par rapport à x en tout point de $\mathbb{R} \times I$.

e. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$.

f. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times I$.

g. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

h. Déterminer $F'(x)$.

i. En déduire que la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	3 pts
Exercice 1	3 pts
Exercice 2	5 pts
Exercice 3	4 pts
Exercice 4	5 pts