Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Examen terminal, le 14 mai 2014, 13h30-16h30

CORRIGE et BAREME

Question de cours. a. **(1 pt)** Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact s'il est borné et fermé.

b. **(2 pts)** Supposons K est compact et soit (x_k) une suite dans K. Montrons qu'on peut extraire une sous-suite de (x_k) qui converge dans $\mathbb{R}^n$ et qui a limite dans K. Comme K est compact, K est borné. Comme $x_k \in K$ pour tout k, la suite (x_k) est bornée. D'après Bolzano-Weierstraß, il existe une sous-suite extraite (x_{k_ℓ}) de (x_k) qui converge dans $\mathbb{R}$. Comme K est fermé, K est fermé pour la prise de limite de suite, i.e., $\lim x_{k_\ell} \in K$.

Afin de montrer le réciproque, procédons par contraposée et montrons que si K n'est pas compact alors il existe une suite dans K dont aucune suite extraite convergente possède une limite dans K.

Supposons donc K est non compact. Il y a deux possibilités : ou bien K n'est pas borné, ou bien K n'est pas fermé. Dans le dernier cas, il existe une suite (x_k) dans K convergente dans $\mathbb{R}^n$ dont la limite n'appartient pas à K. Il en est donc de même pour toute suite extraite. Cela montre bien qu'il existe une suite dans K dont aucune suite extraite convergente possède une limite dans K, lorsque K n'est pas fermé.

Dans le premier cas, K n'est pas borné, et il existe donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ un élément $x_k \in K$ tel que $||x_k|| \geq k$. Aucune suite extraite de la suite (x_k) n'est bornée. Du coup, aucune suite extraite de la suite (x_k) est convergente. Par conséquent, toute suite extraite convergente de la suite (x_k) a sa limite en dehors de K. Cela montre bien qu'il existe une suite dans K dont aucune suite extraite convergente possède une limite dans K, lorsque K n'est pas borné.

Exercice 1. a. **(0,5 pt)** Il suffit de montrer que chacune des fonctions réelles f_1, f_2, f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Or, les fonctions cos, sin, sh, arctan et la fonction constante $\frac{\pi}{2}$ sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$. Du coup, des sommes, produits et compositions itérés de ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ également. Par conséquent, les fonctions f_1, f_2, f_3 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et du coup f l'est aussi.

b. **(0,5 pt)** On montre plutôt que $||f(t)||^2 = 1$. En effet,

$$||f(t)||^2 = f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^2 = \cos(\mathrm{sh}(t))^2 \cdot \sin(\arctan(t) + \tfrac{\pi}{2})^2 +$$
$$\sin(\mathrm{sh}(t))^2 \cdot \sin(\arctan(t) + \tfrac{\pi}{2})^2 + \cos(\arctan(t) + \tfrac{\pi}{2})^2 =$$
$$(\cos(\mathrm{sh}(t))^2 + \sin(\mathrm{sh}(t))^2) \cdot \sin(\arctan(t) + \tfrac{\pi}{2})^2 + \cos(\arctan(t) + \tfrac{\pi}{2})^2 =$$
$$\sin(\arctan(t) + \tfrac{\pi}{2})^2 + \cos(\arctan(t) + \tfrac{\pi}{2})^2 = 1.$$

c. **(1 pt)** D'après le b, $\langle f(t), f(t)\rangle = ||f(t)||^2 = 1$. On a donc, en particulier,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f(t), f(t)\rangle = 0.$$

Comme f est dérivable, le premier membre est égal à $2\langle f(t), f'(t)\rangle$ d'après le cours. Du coup on a bien $\langle f(t), f'(t)\rangle = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

d. **(1 pt)** La limite en question existe si et seulement si toutes les limites $\lim_{t\to+\infty} f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, existent. Or, la limite $\lim_{t\to+\infty} f_1(t)$ existe car $\cos(sh(t))$ est bornée et $\sin(\arctan(t)+\frac{\pi}{2})$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. On donc $\lim_{t\to+\infty} f_1(t) = 0$. Pour les mêmes raisons, on a $\lim_{t\to+\infty} f_2(t) = 0$. Comme $\cos(\arctan(t) + \frac{\pi}{2})$ tend vers -1 lorsque t tend vers $+\infty$, on a $\lim_{t\to+\infty} f_3(t) = -1$. Comme les 3 limites existent $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe, et de plus

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \left(\lim_{t\to+\infty} f_1(t), \lim_{t\to+\infty} f_2(t), \lim_{t\to+\infty} f_3(t)\right) = (0, 0, -1).$$

(voir le figure ci-dessous)

Exercice 2. a. **(1 pt)** On montre plutôt que le complémentaire de U, à savoir $\{(0,0)\}$, est fermé dans $\mathbb{R}^2$. D'après le cours, un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est fermé s'il est fermé pour la prise de limite de suite. Plus précisément, F est fermé si pour toute suite (x_k) dans F qui converge dans $\mathbb{R}^n$, on a $\lim x_k \in F$. Or, ici $F = \{(0,0)\}$. Toute suite (x_k) dans F est donc constante, i.e., $x_k = (0,0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Du coup, (x_k) converge, et sa limite est égale à $(0,0)$ qui appartient bien à F. Par conséquent, F est fermé et U est ouvert.

b. **(1 pt)** D'après le cours, les fonctions polynomiales $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, en particulier, sur U. De plus, la dernière ne s'annulant pas sur U, son inverse $(x,y) \mapsto 1/(x^2+y^2)$ est encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Par conséquent, la fonction produit $(x,y) \mapsto x \cdot 1/(x^2+y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Par symétrie en x et y, la fonction $(x,y) \mapsto y/(x^2+y^2)$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Comme ses deux fonctions coordonnée sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

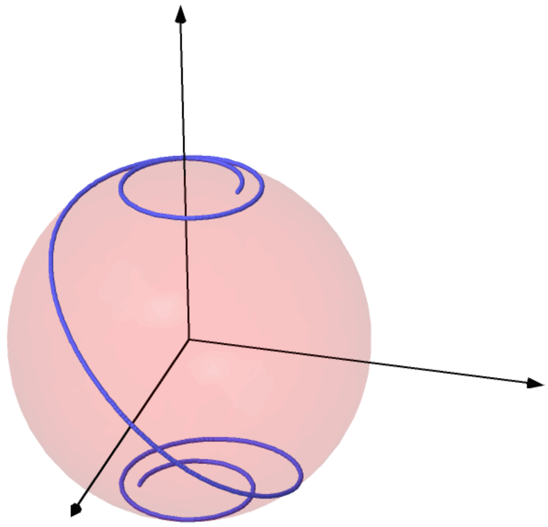

FIGURE 1 – La courbe image de l'exercice 1, contenue dans la sphère unité.

c. **(1 pt)** En écrivant $f = (f_1, f_2)$ on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Comme f_2 est obtenue à partir de f_1 en échangeant x et y, on a donc aussi

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{-y^2+x^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calculons encore

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x \cdot \frac{-1}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

On en déduit de même par échange de x et y que

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

d. **(1 pt)** La matrice jacobienne de f en (x, y) est

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -x^2+y^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. a. **(1 pt)** On a bien $||(x,y,z)||' \geq 0$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. De plus $||(0,0,0)||' = 0$. Vérifions que c'est le seul vecteur de $\mathbb{R}^3$ avec cette propriété. Supposons que $||(x,y,z)||' = 0$. On a alors $|x+y|+|x-y|+|z| = 0$. Comme tous les termes du premier membre sont positifs et leur somme vaut zéro, ils sont tous nuls, i.e., $x+y=0$, $x-y=0$ et $z=0$. On en déduit aisément que $x=y=z=0$. On a donc bien $||(x,y,z)||' = 0$ si et seulement si $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$||\lambda \cdot (x,y,z)||' = ||(\lambda x, \lambda y, \lambda z)||' = |\lambda x + \lambda y| + |\lambda x - \lambda y| + |\lambda z| =$$
$$|\lambda|\cdot|x+y|+|\lambda|\cdot|x-y|+|\lambda|\cdot|z| = |\lambda|\cdot(|x+y|+|x-y|+|z|) = |\lambda|\cdot||(x,y,z)||'.$$

Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire. Soient $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. On a, en utilisant l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ||(x,y,z)+(x',y',z')||' &= ||(x+x', y+y', z+z')||' = \\ &|(x+x')+(y+y')| + |(x+x')-(y+y')| + |z+z'| \leq \\ &|x+y| + |x'+y'| + |x-y| + |x'-y'| + |z| + |z'| = \\ &||(x,y,z)||' + ||(x',y',z;)||'. \end{aligned}$$

La fonction $||\cdot||'$ est donc bien une norme sur $\mathbb{R}^3$.

b. **(1 pt)** D'après le cours, deux normes sur un espace vectoriel réel de dimension finie sont équivalentes. Cela veut dire qu'il existe des nombres réels $m, M > 0$ tels que

$$m||(x,y,z)|| \leq ||(x,y,z)||' \leq M||(x,y,z)||,$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

c. **(2 pts)** Rappelons que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} = ||(x,y,z)||$ et de même pour $|y| \leq ||(x,y,z)||$ et $|z| \leq ||(x,y,z)||$. Du coup, on a

$$|x \pm y| \leq |x| + |y| \leq 2||(x,y,z)||,$$

et

$$||(x,y,z)||' = |x+y| + |x-y| + |z| \leq 5||(x,y,z)||.$$

On pourra donc prendre $M = 5$.

Rappelons encore que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ lorsque $a, b \geq 0$. On a donc

$$||(x,y,z)|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2} = |x| + |y| + |z|.$$

D'après l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a

$$\begin{aligned} |2x| &= |(x+y)+(x-y)| \leq |x+y| + |x-y| \\ |2y| &= |(x+y)-(x-y)| \leq |x+y| + |x-y|. \end{aligned}$$

Du coup,
$$|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|,$$
et
$$||(x,y,z)|| \leq |x| + |y| + |z| \leq |x+y| + |x-y| + |z| = ||(x,y,z)||'.$$
On pourra donc prendre $m = 1$.

Exercice 4. a. **(0,5 pt)** Pour $x \in X$, la fonction $f_x(t)$ est égale à $t\sqrt[4]{x^4+t^4}$ et est donc continue sur l'interval $I = [0,1]$. Il s'ensuit que f_x est intégrable sur I.

b. **(0,5 pt)** On calcule
$$F(0) = \int_0^1 t\sqrt[4]{0^4+t^4}\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \tfrac{1}{3}.$$

c. **(1 pt)** Pour $t \in I$, soit $f_t\colon X \to \mathbb{R}$ définie par $f_t(x) = f(x,t)$. Pour $t \neq 0$, on a $f_t(x) = t\sqrt[4]{x^4+t^4}$. Comme $x^4+t^4 \neq 0$ pour tout x lorsque $t \neq 0$, la fonction f_t est dérivable pour $t \neq 0$. Il s'ensuit que f est partiellement dérivable par rapport à x en les points (x,t) avec $t \neq 0$. Si $t = 0$, alors f_t est identiquement nulle. Comme la fonction nulle est dérivable, la fonction f est également partiellement dérivable en les points $(x,0)$.

d. **(1 pt)** Pour $t \neq 0$ on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t \cdot \tfrac{1}{4}(x^4+t^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot 4x^3 = \frac{tx^3}{\left(\sqrt[4]{x^4+t^4}\right)^3}.$$
Comme on a vu ci-dessus, pour $t = 0$ la fonction f_t est identiquement nulle. On a donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ pour tout $x \in X$. Remarquons que la formule ci-dessus pour $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ pour $t \neq 0$ a un sens pour $t = 0$ et $x \neq 0$ et coincide avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$. On a donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \begin{cases} \frac{tx^3}{\left(\sqrt[4]{x^4+t^4}\right)^3} & \text{si } (x,t) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,t) = (0,0) \end{cases}$$
pour tout $(x,t) \in X \times I$.

e. **(1 pt)** D'après le d, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en tout point de $X \times I \setminus \{(0,0)\}$.Il suffit donc de montrer qu'elle est continue en $(0,0)$. Soit (x_n, t_n) une suite dans $X \times I$ qui converge vers $(0,0)$ avec $(x_n,t_n) \neq (0,0)$. On montre que la suite $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,t_n)$ converge et tend vers 0. Remarquons que, pour $(x,t) \neq (0,0)$, on a l'encadrement
$$0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{|t| \cdot |x|^3}{\left(\sqrt[4]{x^4+t^4}\right)^3} \leq \frac{\sqrt[4]{x^4+t^4} \cdot \left(\sqrt[4]{x^4+t^4}\right)^3}{\left(\sqrt[4]{x^4+t^4}\right)^3} = \sqrt[4]{x^4+t^4}.$$

Comme $\sqrt[4]{x_n^4 + t_n^4}$ tend vers 0 lorsque (x_n, t_n) tend vers 0, la suite $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, t_n)$ tend vers 0. Cela montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $X \times I$.

f. **(1 pt)** Comme f est partiellement dérivable par rapport à x sur $X \times [0,1]$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $X \times [0,1]$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X (voir Corollaire 46).

g. **(0,5 pt)** D'après ce même corollaire, on a, de plus,

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\, dt = \int_0^1 \frac{tx^3}{\left(\sqrt[4]{x^4 + t^4}\right)^3}\, dt.$$

h. **(0,5 pt)** D'après le g, on a

$$F'(0) = \int_0^1 \frac{t \cdot 0^3}{\left(\sqrt[4]{0^4 + t^4}\right)^3}\, dt = 0.$$