Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Examen terminal, le 17 mai 2013, 9h00-12h00

CORRIGE et BAREME

Question de cours. (4 pts) On a vu plusieurs exemples de ce genre de fonctions. La suivante en est une. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

lorsque $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$. Comme $x^2+y^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En particulier, f est partiellement dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Montrons que f est également partiellement dérivable en $(0,0)$. En effet, pour $x \neq 0$, on a

$$f(x,0) = \frac{x^2 \times 0}{x^2+0^2} = 0.$$

Comme $f(0,0) = 0$ également, on constate que $f(x,0) = 0$ pour tout x. Il s'ensuit que f est partiellement dérivable par rapport à x en $(0,0)$. De même, $f(0,y) = 0$ pour tout y, et f est partiellement dérivable par rapport à y en $(0,0)$. Il s'ensuit que f est partiellement dérivable en $(0,0)$. Par conséquent, f est partiellement dérivable sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Montrons que f n'est par différentiable sur $\mathbb{R}^2$ tout entier en montrant que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. En effet, si f était différentiable en $(0,0)$, la matrice de la différentielle de f en 0 serait égale à la matrice jacobienne de f en $(0,0)$. Or, $f(x,0) = 0$ quel que soit x, et $f(0,y) = 0$ quel que soit y. Du coup, les dérivées partielles de f en $(0,0)$ sont nulles également. La différentielle de f en 0 serait donc nulle. On en déduit que la dérivée partielle directionnelle en $(0,0)$ de f dans la direction $(1,1)$ serait encore nulle. Or, cette dérivée vaut

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{2h^3} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Par conséquent, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 1. a. (1 pt) Toutes les fonctions coordonnées de f sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction vectorielle f l'est donc également.

b. (2 pts) L'inégalité des accroissements finis pour f sur l'intervalle $[0,t]$ dit que

$$||f(t)-f(0)|| \leq \sup_{c\in]0,t[} ||f'(c)|| \cdot ||t-0||.$$

Pour $t \geq 0$, on a donc

$$||f(t)|| \leq t \cdot \sup_{c\in]0,t[} ||f'(c)||,$$

car $f(0,0)=0$. Or,

$$f'(c) = \left(\frac{1}{1+c^2}, \frac{2c}{1+c^2}, \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right) = \frac{1}{1+c^2} \cdot \left(1, 2c, c\sqrt{1+c^2}\right).$$

Du coup,

$$||f'(c)||^2 = \frac{1}{(1+c^2)^2} \cdot \left(1^2+4c^2+c^2(1+c^2)\right) = \frac{1+5c^2+c^4}{(1+c^2)^2}.$$

Montrons que cette dernière fraction est $\leq \frac{7}{4}$. En effet, comme $3(1-c^2)^2 \geq 0$, on a

$$0 \leq 3-6c^2+3c^4,$$

et donc aussi

$$4+20c^2+4c^4 \leq 7+14c^2+7c^4,$$

ou encore

$$4(1+5c^2+c^4) \leq 7(1+c^2)^2.$$

D'où

$$\frac{1+5c^2+c^4}{(1+c^2)^2} \leq \frac{7}{4}$$

Il s'ensuit que

$$||f(t)|| \leq t\sqrt{\tfrac{7}{4}}$$

pour tout $t \geq 0$.

Exercice 2. a. (1 pt) f est de classe $\mathcal{C}^1$ si ses fonctions coordonnées le sont. Or, la fonction $(x,y,z) \mapsto x^2y^3+z^4$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et $t \mapsto \cos(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Le composé $\cos(x^2y^3+z^4)$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Comme la fonction $(x,y,z) \mapsto z$ l'est également, le produit $z\cos(x^2y^3+z^4)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Comme la fonction $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, le composé $(x,y,z) \mapsto e^{z\cos(x^2y^3+z^4)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Cela montre que la fonction première coordonnée f_1 de f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. On montre de même que f_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

b. (1 pt)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \Big(e^{z\cos(x^2y^3+z^4)}z(-\sin(x^2y^3+z^4)2xy^3), -\sin(ze^{x^2y^3+z^4})ze^{x^2y^3+z^4}2xy^3\Big)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \Big(e^{z\cos(x^2y^3+z^4)}z(-\sin(x^2y^3+z^4)3x^2y^2), -\sin(ze^{x^2y^3+z^4})ze^{x^2y^3+z^4}3x^2y^2\Big)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \Big(e^{z\cos(x^2y^3+z^4)}(\cos(x^2y^3+z^4)+z(-\sin(x^2y^3+z^4)4z^3))\ ,$$
$$-\sin(ze^{x^2y^3+z^4})(e^{x^2y^3+z^4}+ze^{x^2y^3+z^4}4z^3)\Big)$$

c. (1 pt) La jacobienne de f en (x,y,z) est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. a. (1 pt) Tout d'abord, remarquons que $||(x,y,z)||' \geq 0$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Puis, supposons que $||(x,y,z)||' = 0$ et montrons que $(x,y,z) = (0,0,0)$. En effet, si $|x| + \sqrt{y^2+z^2} = 0$, on a $|x| = 0$ et $\sqrt{y^2+z^2} = 0$ puisqu'ils sont positifs ou nuls tous les deux. Comme $\sqrt{y^2+z^2} = 0$, on $y^2+z^2 = 0$ et donc $y = z = 0$. On a donc bien $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Ensuite montrons que $||\lambda(x,y,z)||' = |\lambda| \cdot ||(x,y,z)||'$. En effet,

$$||\lambda(x,y,z)||' = ||(\lambda x, \lambda y, \lambda z)||' = |\lambda x| + \sqrt{(\lambda y)^2 + (\lambda z)^2} =$$
$$|\lambda| \cdot |x| + |\lambda| \cdot \sqrt{y^2+z^2} = |\lambda| \cdot ||(x,y,z)||'$$

Finalement, on vérifie l'inégalité triangulaire. Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. On a

$$||(x,y,z) + (x',y',z')||' = ||(x+x', y+y', z+z')||' =$$
$$|x+x'| + \sqrt{(y+y')^2 + (z+z')^2} \leq$$
$$|x| + |x'| + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{(y')^2 + (z')^2}$$

car l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ dit que

$$\sqrt{(y+y')^2 + (z+z')^2} \leq \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{(y')^2+(z')^2}.$$

Du coup, on a bien

$$||(x,y,z) + (x',y',z')||' \leq ||(x,y,z)||' + ||(x',y',z')||'$$

Cela montre que $||\cdot||'$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^3$.

b. (1 pt) D'après le cours, n'importe quelles deux normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^3$. En particulier, les normes $||\cdot||$ et $||\cdot||'$ sont équivalentes. Cela veut dire qu'il existe des nombres réels $m, M > 0$ tels que

$$m||(x,y,z)|| \leq ||(x,y,z)||' \leq M||(x,y,z)||.$$

c. (2 pts) Comme

$$||(x,y,z)||^2 = x^2+y^2+z^2 \leq x^2 + 2|x|\sqrt{y^2+z^2} + y^2+z^2 = (||(x,y,z)||')^2,$$

on peut prendre $m = 1$.

Comme $0 \leq (a-b)^2$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $2ab \leq a^2+b^2$. On en déduit que

$$2|x|\sqrt{y^2+z^2} \leq x^2+y^2+z^2.$$

Du coup,

$$(||(x,y,z)||')^2 = x^2+2|x|\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2 \leq 2(x^2+y^2+z^2) = 2||(x,y,z)||^2.$$

On peut donc prendre $M = \sqrt{2}$.

Exercice 4. a. (1 pt) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f_x est continu sur $[0,1]$ et est donc intégrable au sens de Henstock-Kurzweil.

b. (1 pt) Il suffit de montrer l'énoncé pour $b \geq 0$. Soit b donc un nombre réel positif. Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $f_t \colon]-\infty, b[\to \mathbb{R}$ définie par $f_t(x) = f(x,t)$ est dérivable. En effet, $f_t(x) = e^{xt^2}$. De plus, en définissant les fonctions g et h sur $[0,1]$ par

$$g(t) = 0 \quad \text{et} \quad h(t) = e^b,$$

on a bien

$$g(t) \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^2 e^{xt^2} \leq h(t)$$

pour tout $(x,t) \in]-\infty, b[\times [0,1]$. Comme g et h sont intégrables sur $[0,1]$, la fonction F est dérivable sur $]-\infty, b[$ d'après le cours. De plus,

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^1 t^2 e^{xt^2} dt,$$

ce qui montre que F' est continue. Par conséquent, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, b[$.

c. (1 pt) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > a$. D'après le b, F est dérivable au voisinage de a et F' est continue en a. Du coup, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d. (1 pt) D'après ce qu'on a vu ci-dessus,

$$F'(0) = \int_0^0 t^2 e^{0t^2} dt = \int_0^1 t^2 = \tfrac{1}{3}.$$

e. (1 pt) On a

$$2xF'(x) = 2x \int_0^1 t^2 e^{xt^2} dt = \int_0^1 t \cdot 2txe^{xt^2} dt = \left[te^{xt^2}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 e^{xt^2} dt$$

en intégrant par parties. Du coup, $2xF'(x) = e^x - F(x)$, comme il fallait démontrer.

f. (1 pt) D'après le e,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - F(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} F'(x) = F'(0) = \tfrac{1}{3},$$

car F' est continue, d'après le c, et $F'(0) = \frac{1}{3}$, d'après le d.