Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Examen terminal, le 17 mai 2013, 9h00-12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Donner une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est partiellement dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et non différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et le démontrer.

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la fonction vectorielle définie par

$$f(t) = \left(\arctan(t), \ln(1+t^2), \sqrt{1+t^2}-1\right).$$

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. En se servant de l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$||f(t)|| \leq t\sqrt{\tfrac{7}{4}}$$

pour tout $t \geq 0$, où $||\cdot||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y,z) = \left(e^{z\cos(x^2y^3+z^4)}, \cos(ze^{x^2y^3+z^4})\right).$$

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer les dérivées partielles de f.

c. Quelle est la jacobienne $J_{(x,y,z)}f$ de f en (x,y,z) ?

Exercice 3. Définissons une fonction réelle, notée $||\cdot||'$, sur $\mathbb{R}^3$ par

$$||(x,y,z)||' = |x| + \sqrt{y^2+z^2}.$$

a. Montrer que $||\cdot||'$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$.

b. Montrer qu'il existe des nombres réels $m, M > 0$ tels que

$$m||(x,y,z)|| \leq ||(x,y,z)||' \leq M||(x,y,z)||,$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, où $||\cdot||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer explicitement des nombres réels strictement positifs m et M tels que les deux inégalités ci-dessus sont vérifiées.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R}\times[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t)=e^{xt^2}.$$

a. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $f_x\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_x(t)=f(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$ au sens de Henstock-Kurzweil.

Dans la suite on définit $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\int_0^1 f(x,t)dt.$$

b. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,b[$, pour tout nombre réel b.
c. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
d. Calculer $F'(0)$.
e. Montrer que
$$2xF'(x)=e^x-F(x).$$
f. En déduire la valeur de
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-F(x)}{2x}.$$