Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL

REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES

Examen terminal 2nd session, le 14 juin 2007, 8h30–11h30

Les documents sont interdits. Lorsque vous faites des calculs à l'aide de Maple, il suffit de préciser sur la copie les commandes que vous avez effectuées et de donner la réponse du calcul. Il sera tenu compte de la justification des calculs et des commentaires précis quant aux résultats donnés par maple.

Barème indicatif. Exercice 1 : **3 pts**, exercice 2 : **6 pts**, exercice 3 : **4 pts**, exercice 4 : **5 pts**, exercice 5 : **2 pts**,

Exercice 1. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de V.

b. Compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

c. Déterminer une équation définissant V, i.e., déterminer des nombres réels a, b, c, d tels que V est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0.$$

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13\,x_1 - 5\,x_2 + 8\,x_3 - 7\,x_4 + 5\,x_5 \\ 14\,x_1 + 5\,x_2 - 2\,x_3 - 17\,x_4 - 5\,x_5 \\ -2\,x_1 - 5\,x_2 + 7\,x_3 - 3\,x_4 + 5\,x_5 \\ 9\,x_1 + 2\,x_3 - 8\,x_4 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que f est linéaire.

b. Déterminer une base de $\ker(f)$.

c. Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

d. Quel est le rang de f ?

e. Déterminer des bases $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^5$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^4$ dans lesquelles la matrice de f est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -12 & 12 & -8 \\ 4 & 6 & -9 & -1 \\ 4 & -3 & 0 & -7 \\ -4 & -12 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure par une méthode itérative en détaillant pas à pas.

Exercice 5. Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ -15 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Orthonormaliser la famille v_1, v_2, v_3, v_4.