Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL

REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES

Controle continu, le 28 novembre 2006, 15h45-16h15

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. On calcule

$$\det(A - XI) = \det \begin{pmatrix} 2-X & -3 & 2 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{pmatrix} =$$

$$= (2-X)\det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ -1 & 2-X \end{pmatrix} = (2-X)(X^2 - 2X + 1) =$$

$$= -(X-2)(X-1)^2 \quad \textbf{(2 pt)}.$$

b. Déterminons $\dim(E_1)$. Si $\dim(E_1) = 2$, la matrice est diagonalisable. Sinon, elle n'est pas diagonalisable. Or,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Donc E_1 est engendré par le vecteur $v_2 = (1, 1, 1)$, i.e., $\dim(E_1) = 1$. Il s'ensuit que A n'est pas diagonalisable **(3 pt)**.

c. Déterminons un vecteur v_3 tel que $(A - I)v_3 = v_2$, où v_2 est le vecteur défini ci-dessus. Soit $v_3 = (x, y, z)$. On résoud

$$(A - I)v_3 = v_2 \iff \begin{cases} x \; - \; 3y \; + \; 2z \; = \; 1 \\ \quad\; - \; y \; + \; z \; = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z - 2 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

Prenons $z = 0$. Du coup, $v_3 = (-2, -1, 0)$. On a bien $(A - I)v_3 = v_2$, i.e., $Av_3 = v_2 + v_3$.

Soit v_1 un vecteur propre pour $\lambda = 2$. Par exemple, $v_1 = e_1$. La famille v_1, v_2, v_3 est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de colonnes v_1, v_2, v_3, i.e.,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice P est inversible et

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est bien triangulaire **(5 pt)**.