Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL

REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES

Controle continu, le 24 octobre 2006, 15h45-16h15

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. On calcule $\det(XI - A)$ **(1 pt)** :

$$\det\begin{pmatrix} X-8 & -3 & -6 \\ 6 & X+1 & 6 \\ 6 & 3 & X+4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} X-8 & -3 & -6 \\ X-2 & X-2 & 0 \\ X-2 & 0 & X-2 \end{pmatrix} =$$

$$= (X-2)^2 \det\begin{pmatrix} X-8 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (X-2)^2 \det\begin{pmatrix} X-2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (X-2)^2 \det\begin{pmatrix} X-2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (X-2)^2(X+1).$$

Le polynôme caractéristique de A est donc $(X-2)^2(X+1)$ **(2 pt)**.

b. Le valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique, i.e., -1 et 2 **(1 pt)**.

c. D'abord pour $\lambda = -1$. On détermine E_{-1}. Pour cela, il faut résoudre $(A+I)v = 0$ dans $\mathbb{R}^3$ **(1 pt)** :

$$\begin{cases} 9x + 3y + 6z = 0 \\ -6x - 6z = 0 \\ -6x - 3y - 3z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

Par conséquent

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

Ensuite, détreminons E_2. On résoud $(A-2I)v = 0$ dans $\mathbb{R}^3$ **(1 pt)** :

$$\begin{cases} 6x + 3y + 6z = 0 \\ -6x - 3y - 6z = 0 \\ -6x - 3y - 6z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left\{ x = -\tfrac{1}{2}y - z \right.$$

Du coup,

$$E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right) \quad \textbf{(1 pt)}.$$

d. Comme les familles génératrices de E_{-1} et E_2 ci-dessus sont des bases de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, on a $\dim(E_{-1}) = 1$ et $\dim(E_2) = 2$. Comme 1 est une racine du polynôme caractéristique de multiplicité 1, et 2 en est une de multiplicité 2, la matrice A est diagonalisable **(1 pt)**.

e. Il suffit de prendre

$$P = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$