Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE IMP
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Examen, le 10 mai 2007, 10h00-12h00

Corrigé et barème

Question de cours. Soit $d = \det(a_{ij})$. D'après la règle de Cramer, le système admet une et une seule solution **(1 pt)**, à savoir

$$x = \frac{1}{d} \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ y = \frac{1}{d} \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$z = \frac{1}{d} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Exercice 1. a. Une base de U est

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}$$

b. Une base de V est

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}$$

c. Une famille génératrice de $U + V$ est u_1, u_2, v_1, v_2 **(1 pt)**.

d. Regardons si cette famille est libre. On effectue la méthode de Gauss sur la matrice de colonnes u_1, u_2, v_1, v_2 pour en déterminer son rang :

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & -3 & 1 \\ 0 & -36 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -3 & 1 \\ 0 & -36 & -6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est de rang 3, i.e., la famille u_1, u_2, v_1, v_2 est liée. Comme les pivots se trouvent dans les 3 premières colonnes, la famille u_1, u_2, v_1 est libre, et est donc une base de $U + V$ **(1 pt)**.

e. D'après le d, $\dim(U + V) = 3$ **(1 pt)**.

Exercice 2. a. On effectue la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \\ x - 12y + 5z - 7t = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ \quad -7y + 2z - 3t = 0 \\ \quad -14y + 4z - 6t = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ \quad -7y + 2z - 3t = 0 \end{cases}$$

Du coup, une base de $\ker(f)$ est

$$v_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

b. Il est clair que e_1, e_2, v_1, v_2 est une famille libre, c'est donc une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ **(1 pt)**.

c. Soient

$$w_1 = f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ w_2 = f(e_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

La famille w_1, w_2 est forcément libre. Il faut la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$. Comme

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -12 & 1 \end{pmatrix} = 7 \neq 0,$$

la famille w_1, w_2, e_3 est libre. Par conséquent, c'est une base $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^3$ **(1 pt)**. Comme $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$, $f(v_1) = 0$ et $f(v_2) = 0$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ est bien égale à la matrice A' **(1 pt)**.

Exercice 3. a.

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-5 & -7 \\ -1 & 4 & \lambda+6 \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-5 & -7 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(\lambda-1)\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2) \quad \textbf{(1 pt)}$$

b. Les valeurs propres de A sont les zéros de son polynôme caractéristique. D'après le a, ce sont $1, -1, -2$ **(1 pt)**.

c. On détermine un vecteur propre pour chaque valeur propre de A.

Pour $\lambda = 1$, on cherche une solution non triviale du système

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = x \\ -x + 5y + 7z = y \\ x - 4y - 6z = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 4y + 7z = 0 \\ x - 4y - 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -3y - 6z = 0 \end{cases}.$$

Une solution non triviale est donc

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C'est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda = 1$.

De même, soient

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur v_2 est vecteur propre pour $\lambda = -1$, et v_3 pour $\lambda = -2$ **(1 pt)**.

Soit

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours, P est inversible et $P^{-1}AP$ est diagonale **(1 pt)**.

d. On a

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

e. Comme $A' = P^{-1}AP$, on a $A = PA'P^{-1}$, et du coup

$$A^k = (PA'P^{-1})^k = P(A')^k P^{-1} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

On détermine P^{-1} :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Par conséquent,

$$A^k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & (-1)^k & 0 \\ -2 & (-1)^{k+1} & -(-2)^k \\ 1 & (-1)^k & (-2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^k & 1+(-1)^{k+1} & 1+(-1)^{k+1} \\ (-1)^{k+1}+(-2)^k & 2+(-1)^k+(-2)^{k+1} & 2+(-1)^k-3(-2)^k \\ (-1)^k-(-2)^k & -1+(-1)^{k+1}+2(-2)^k & -1+(-1)^{k+1}+3(-2)^k \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}$$