Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE IMP
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Examen, le 15 juin 2005, 9h00-11h00

Documents et calculatrices sont interdits.
Barème indicatif. Question de cours : **2 points**, exercice 1 : **5 points**, exercice 2 : **5 points**, exercice 3 : **8 points**.

Question de cours. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme.

a. Donner la définition d'un vecteur propre de f.

b. Donner la définition d'une valeur propre de f.

Exercice 1. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A.

b. Déterminer A^{-1}.

c. Supposons qu'il existe une matrice B telle que $B^2 = A$. Que vaut $\det(B)$ et pourquoi ?

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 4x-y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

a. Montrer que f est linéaire.

b. Montrer que f est injective.

c. Déterminer $\operatorname{rang}(f)$.

d. Déterminer une équation cartésienne de $\operatorname{im}(f)$.

Exercice 3. Soit A la matrice 2×2 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -30 & 12 \end{pmatrix}$$

T. S. V. P.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b. Déterminer les valeurs propres de A.

c. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

d. Déterminer la matrice $B = P^{-1}AP$.

e. Déterminer B^{2005}.

f. Déterminer A^{2005}.